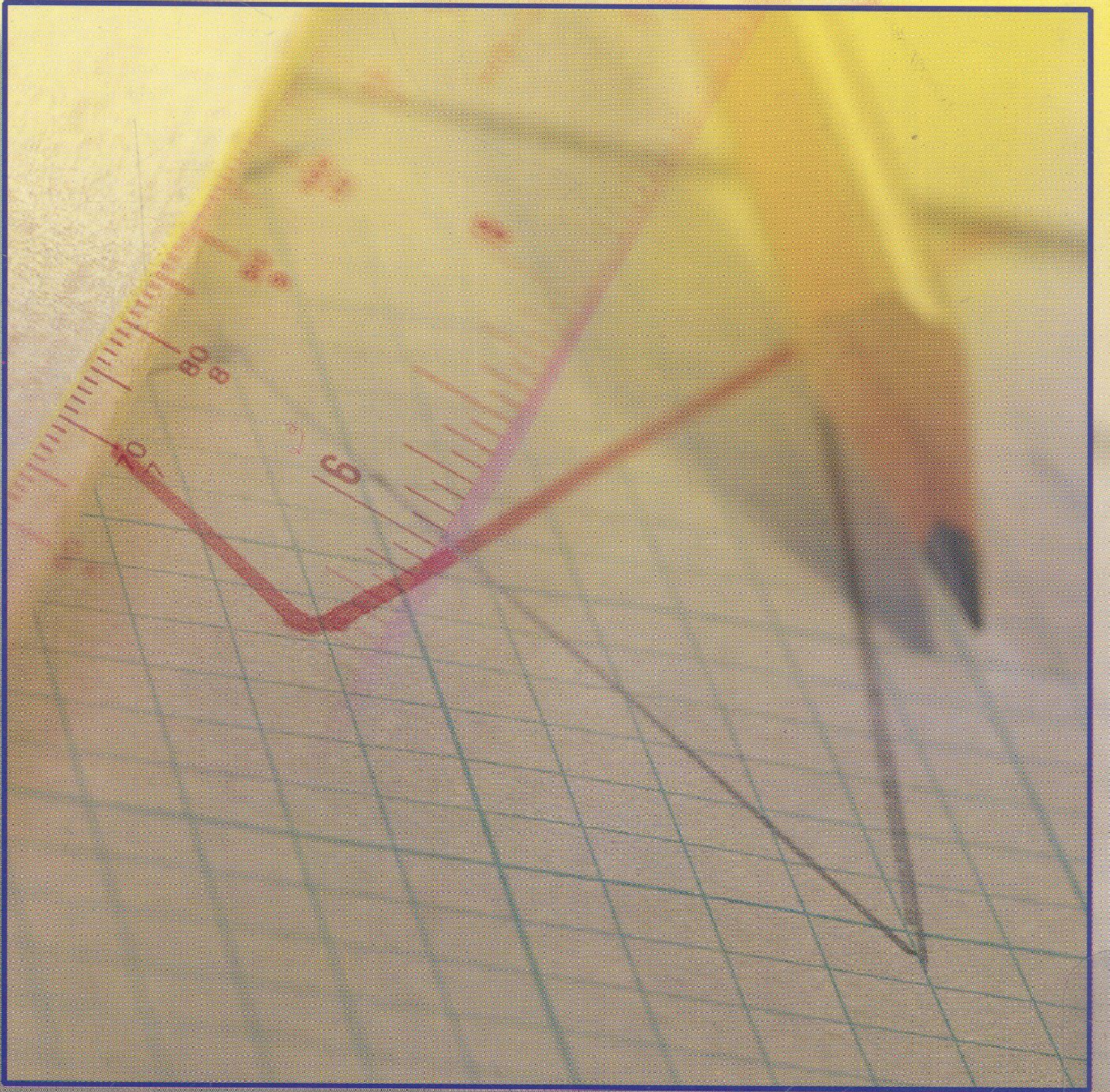
هندسة التحويلات



لطلبة الجامعات والمعاهد العليا

تأليف

دكتور/ عبدالهادى محمود الإتربى — دكتور/ سامى محمد مصطفى

قسم الرياضيات
كلية التربية - جامعة عين شمس

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

هندسة التحويلات

لطلبة الجامعات والمعاهد العليا

تأليف

دكتور / عبد الهادى محمود الاتربى   دكتور / سامى محمد مصطفى

قسم الرياضيات
كلية التربية – جامعة عين شمس

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية
مصر

الطبعة الأولى

2000 م

هندسة التحويلات

تأليف

د. عبد الهادى الاتربى

رقم الإيداع

2000/3150
I.S.B.N 977-282-077-3

8 إبراهيم العرابى ـ النزهة الجديدة ـ مصر الجديدة ـ القاهرة ـ ج.م.ع.

ص.ب: 5599 هليوبوليس غرب / القاهرة ـ تليفون: 2957655/2972344 فاكس : 2957655 (00202)

المحتويــــات

المقدمة ٧

الباب الأول: مفاهيم أساسية ٩

١-٢ المفهوم العام للعلاقة ١٦

١-٢-١ علاقة التكافؤ ١٧

١-٣ مفهوم الراسم ٢٠

١-٣-١ تحصيل الرواسم ٢٢

١-٤ الزمرة ٢٦

١-٥ الفراغ الاتجاهى ثنائى البعد ٣٠

١-٦ القطعة المستقيمة الموجهة ٣٤

١-٧ التحويلة الهندسية ٣٩

١-٨ مصفوفة التحويل ٤١

١-٩ الزاوية الموجهة ٤٧

١-١٠ التمويل المباشرة والمضادة ٥١

١-١١ التساوى والقياس ٥٢

تمارين عامة ٥٣

الباب الثاني : الانعكاس ٥٩

٢-١ صورة النقطة بالانعكاس ٥٩

٢-٢ خواص الانعكاس ٧٨
٢-٣ مصفوفة الانعكاس ٨٢
تمارين عامة ٩٥
الباب الثالث : الدوران ٩٩
٣-١ صورة النقطة بالدوران ٩٩
٣-٢ نصف الدورة ١٠٠
٣-٣ خواص الدوران ١١٢
٣-٤ مصفوفة الدوران ١٢٥
تمارين عامة ١٣٥
الباب الرابع : الانتقال ١٤١
٤-١ صورة النقطة بالانتقال ١٤١
٤-٢ خواص الانتقال ١٤٢
٤-٣ مصفوفة الانتقال ١٦١
تمارين عامة ١٦٥
الباب الخامس : الانعكاس الانزلاقى ووحدانية التساويات القياسية ١٦٩
٥-١ صورة النقطة بالانعكاس الانزلاقى ١٦٩
٥-٢ خواص الانعكاس الانزلاقى ١٧٢
٥-٣ وحدانية التساويات القياسية ١٧٦
تمارين عامة ١٩٥

الباب السادس :التشابه ٢٠١
٦-١ مفهوم التشابه ٢٠١
٦-٢ التكبير ٢٠٦
٦-٣ خواص التشابه ٢١٩
٦-٤ أمثلة متنوعة ٢٢٠
تمارين عامة ٢٢٣

مقدمة

إن تقديمنا لهذا الكتاب يهدف فى المقام الأول إلى تعريف الطالب لغة "هندسة التحويلات" ودراستها كتركيب رياضى أو كنظام من أنظمة المسلمات . ونهدف فى المقام الثانى إلى أن يكون هذا الكتاب نقطة انطلاق لكتب أكثر تعمقاً وأكثر تخصصاً لتغطية العديد من أفرع الرياضيات المستحدثة والتى يجب أن توجد فى المكتبة العربية حتى نواكب ركب الحضارة والعلوم الحديثة ، ونثرى تلك المكتبة بالمراجع العلمية . ونهدف أخيراً إلى أن يكون هذا الكتاب مرجعاً للسنوات الجامعية الأولى والمعاهد العليا .

وقد حاولنا بقدر الإمكان أن تكون أبواب الكتاب متناسقة حتى تكون عملية القراءة مريحة ومثمرة . وحرصنا أيضاً على أن يكون الكتاب مجالاً لتوجيه الدارس نحو التفكير والمعرفة ، فالمعرفة باب العلم ، والعلم وسيلة التفوق والسيادة.

ونأمل بذلك أن نكون قد ساهمنا فى ملء الفراغ الذى يحس به قراء العربية فى هذا المجال . كما نأمل أن نعيد إلى ذهن العالم سيرة أجدادنا الذين قادوا الحضارة العالمية بما حملوه من مشاعل النور والعلم والمعرفة.

والله الموفق والمعين

المؤلفان

الباب الأول

مفاهيم أساسية

١ – ١ :مفهوم المجموعة

المجموعة لفظ يطلق على أى تجمع من الأشياء المدركة حسيا أو بديهيا ،على أن تكون هذه الاشياء متمايزة ومحددة تحديداً تاما . والاشـياء المكونـة للمجموعـة تسـمى عناصر المجموعة.

عادة يرمز للمجموعات بـالرمز **س** ،**ص**، **ع** ، ... بينما لعناصر المجموعـة بـالرمز س،ص،ع، ... واذا كان العنصر س أحد عناصر المجموعة **س** فاننا نقـول أن "العنصـر س ينتمى الى المجموعة **س**" ونعبر عن ذلك بالرمز س ، **س**، أما اذا كان العنصر س ليـس أحـد عناصر المجموعة **س** فأننا نقول أن " العنصر س لا ينتمى الى المجموعة **س**" ونعبر عن ذلـك بالرمز س ∉ **س** . وهناك طريقتين للتعبير عن المجموعات :

الطريقة الأولى :

تتلخص هذه الطريقة فى كتابه (ان امكن ذلك) جميع عناصر المجموعة بين القوسين {   } .

فمثلا ، اذا كانت عناصر المجموعة **س** هى ١ ،٣ ،٥ ،٧ فان هذه المجموعة تكتب على النحو التالى :

س = { ١،٣،٥،٧ }

الطريقة الثانية :

تتلخص هذه الطريقة فى إيجاد خاصية أو أكثر تحدد تحديداً تاماً أى العناصر تنتمى الى تلك المجموعه.

فمثلاً :

س = { س: س عدد فردى موجب }

وتقرأ **س** على النحو التالى " المجموعة س هى المجموعة التى عناصرها س حيـث س عدد فردى موجب "

ويلاحظ أن

٣∈ **س**   بينما   ٤ ∉ **س**

وفيما يلي سنذكر بعض المجموعات كثيرة الاستخدام :

١- **ط** = { ١، ٢، ٣، ...} وتسمى مجموعة الأعداد الطبيعية .

٢- **ك** = {٠، ١، ٢، ٣، ...} وتسمى مجموعة الأعداد الكلية .

٣- **ص** = {...، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ...} وتسمى مجموعة الأعداد الصحيحة .

٤- **ق** = { س : س = $\frac{أ}{ب}$ ؛ أ ، ب ∈ **ص** ، ب ≠ ٠ } وتسمى مجموعة الأعداد القياسية .

٥- ح = { س :س عدد حقيقي } وتسمى مجموعة الأعداد الحقيقية .

٦- **ك** ={ س : س = أ + ت ب ؛ أ ، ب ∈ ح ، ت = $\sqrt{-1}$ } وتسمى مجموعة الأعداد المركبة .

ملاحظه (١) :

المجموعة التي بها عدد محدد من العناصر تسمى مجموعة منتهيه . خلافا لذلك فالمجموعة تسمى مجموعة غير منتهيه .

فمثلاً : **س** = { ١، ٣، ٥، ٧ } هي مجموعة منتهيه ، بينما **ط** ، **ك**، ك ، **ص** ، **ق**، ح مجموعات غير منتهيه .

مثال (١) :

اذا كان أ ، ب ∈ ح، أ < ب فان :

١ -{ س ∈ ح : أ < س < ب} تسمى بالفترة المفتوحة ويرمز لها بالرمز (أ ، ب)

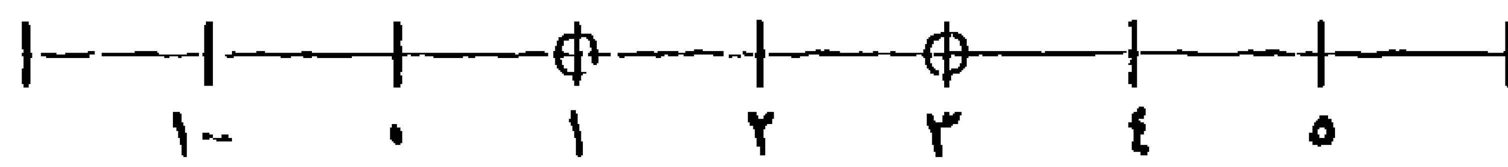
٢- {س ∈ ح : أ ≤ س ≤ب} تسمى بالفترة المغلقة ويرمز لها بالرمز [أ ، ب]

٣-{س ∈ ح : أ < س ≤ ب } تسمى بالفترة المفتوحة – المغلقة ويرمز لها بالرمز (أ ، ب].

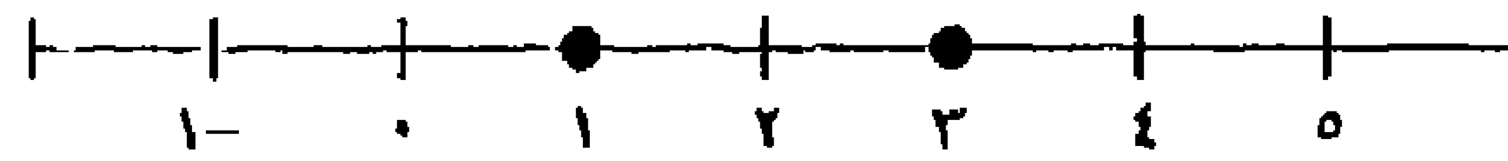
٤-{س ∈ ح : أ≤ س < ب } تسمى بالفترة المغلقة – المفتوحة ويرمز لها بالرمز [أ ، ب).

ويمكن تمثيل المجموعات السابقة على الخط المستقيم كما تبين من شكل (١-١) في حالة أ = ١، ب = ٣ .

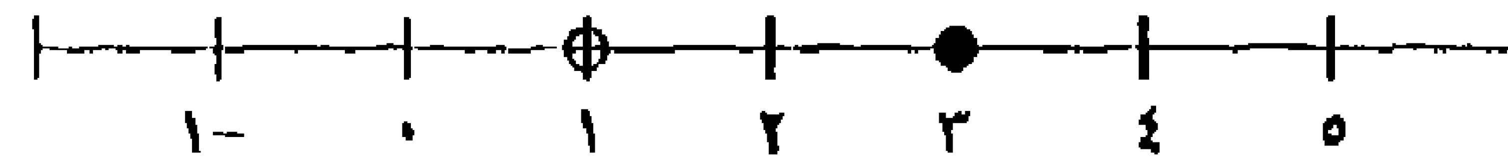
(١ ، ٣)



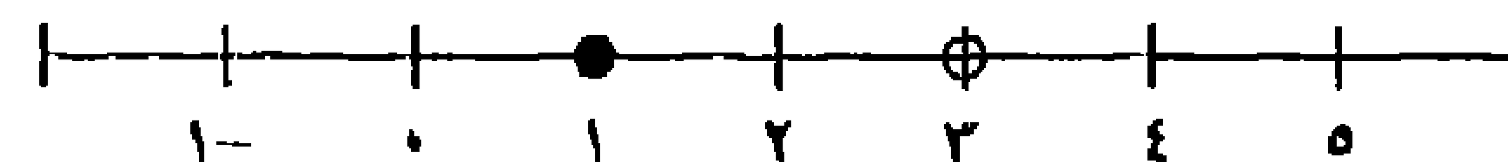
[١ ، ٣]



(١ ، ٣]



[١ ، ٣)



شكل (١-١)

ملاحظة (٢) :

الرمز ∀ يعنى " لكل" أو " لأى "

الرمز ∃ يعنى " يوجد "

الرمز ⇐ يعنى " إذا ...فان " أو " تؤدى إلى "

الرمز ⇔ يعنى " اذا واذا فقط "

١-١-١ : المجموعة الجزئية

يقال للمجموعة **س** بأنها مجموعة جزئية من المجموعة **ص** (ونعبر عن ذلك بالرمز **س** ⊂ **ص**) إذا وإذا فقط كل عنصر فى **س** ينتمى إلى **ص** أى أن :

س ⊂ **ص** ⇔ ∀ س (س ∈ **س** ⇐ س ∈ **ص**)

وإذا كانت **س** ⊂ **ص** ، **س** ≠ **ص** فان **س** تسمى مجموعة جزئية فعلية من **ص**

ملاحظة (٣) :

لاحظ أن **س** ⊂ **ص** ، لا تستبعد أن تكون **س** = **ص** .

ملاحظة (٤) :

(**س** = **ص**) ⇔ (**س** ⊂ **ص** ، **ص** ⊂ **س**)

١-١-٢ : المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية :

كثيراً ما تكون المجموعات التى نقوم بدراستها فى مسألة ما هى مجموعات جزئية من مجموعة معطاه . مثل هذه المجموعة تسمى المجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز **ش** .

أيضا فى دراستنا للمجموعات سنلتقى بما يسمى المجموعة الخالية وهى مجموعة ليس بها أى عنصر ويرمز لها عاده بالرمز ϕ

مثال (٢) :

س = { س : س ≠ س } = ϕ

ص = {س : $س^{٢}$ = ٣٦ ، س عدد فردى } = ϕ

ع = { س : س ∈ **ق** ، س ∉ **ق** } = ϕ

ملاحظة (٥) :

(أ) ϕ ⊂ **س** لأى مجموعة **س** .

(ب) جميع المجموعات الخالية متساوية ، أى أن ϕ وحيده .

١-١-٣ : عائله المجموعات

كثيراً ما يحدث أن تكون عناصر المجموعة عبارة عن مجموعات . فى هذه الحالة نطلق على تلك المجموعة اسم عائلة المجموعات أو فصل المجموعات .

مثال (٣) :

أ = { **ط** ، **ك** ، **ق** ، ك }

هى عائله المجموعات **ط** ، **ك** ، **ق** ، ك .

١-١-٤ : العمليات الجبرية على المجموعات

أولاً : الاتحاد

اتحاد مجموعتين **س** ، **ص** يرمز له بالرمز **س** ∪ **ص** وهو عبارة عن مجموعة جميع العناصر التى تنتمي إلى **س** أو إلى **ص** .

أى أن :

س ∪ **ص** = { س : س ∈ **س** أو س ∈ **ص** } .

ثانيا : التقاطع

تقاطع مجموعتين **س** ،**ص** يرمز له بالرمز **س** ∩ **ص** وهو عبارة عن مجموعة جميع العناصر التى تنتمي إلى **س** ، **ص** .

أى أن :

س ∩ **ص** = { س : س ∈ **س** ، س ∈ **ص** }

ثالثا : الفرق

الفرق بين مجموعتين **س** ، **ص** يرمز له بالرمز **س** – **ص** وهو عبارة عن مجموعة جميع العناصر التى تنتمي إلي **س** ولا تنتمي إلى **ص** .

أى أن :

س – **ص** = { س : س ∈ **س** ، س ∉ **ص** } .

ملاحظة (٦) :

يقال للمجموعتين **س** ، **ص** بأنهما منفصلتين إذا كان

س ∩ **ص** = ϕ

رابعاً : المكملة

مكملة المجموعة **س** هو الفرق بين المجموعتين **ش** ، **س** ويرمز لها بالرمز **س**′ .

أى أن :

س′ = { س : س ∈ **ش** ، س ∉ **س** }

= { س : س ∉ **س** } .

١-١-٥: القوانين الجبرية للمجموعات

إذا كانت **س** ، **ص** ، ع ثلاثة مجموعات اختيارية ، فأن

١- قوانين الخمود :

$\text{س} \cup \text{س} = \text{س}$

$\text{س} \cap \text{س} = \text{س}$

٢-قوانين الدمج

$(\text{س} \cup \text{ص}) \cup \text{ع} = \text{س} \cup (\text{ص} \cup \text{ع})$

$(\text{س} \cap \text{ص}) \cap \text{ع} = \text{س} \cap (\text{ص} \cap \text{ع})$

٣- قوانين الابدال :

$\text{س} \cup \text{ص} = \text{ص} \cup \text{س}$

$\text{س} \cap \text{ص} = \text{ص} \cap \text{س}$

٤-قوانين التوزيع :

$\text{س} \cup (\text{ص} \cap \text{ع}) = (\text{س} \cup \text{ص}) \cap (\text{س} \cup \text{ع})$

$\text{س} \cap (\text{ص} \cup \text{ع}) = (\text{س} \cap \text{ص}) \cup (\text{س} \cap \text{ع})$

٥-قوانين الوحدة :

$\text{س} \cup \phi = \text{س}$ $\qquad$ $\text{س} \cap \text{ش} = \text{س}$

$\text{س} \cup \text{ش} = \text{ش}$ $\qquad$ $\text{س} \cap \phi = \phi$

٦-قوانين المكمله:

$\text{س} \cup \text{س}' = \text{ش}$ $\qquad$ $\text{س} \cap \text{س}' = \phi$

$(\text{س}')' = \text{س}$ $\qquad$ $\text{ش}' = \phi$ ، $\phi' = \text{ش}$

٧- قوانين دى مورجان :

$(\text{س} \cup \text{ص})' = \text{س}' \cap \text{ص}'$

$(\text{س} \cap \text{ص})' = \text{س}' \cup \text{ص}'$

١-١-٦ حاصل ضرب المجموعات

تعريف : الزوج المرتب يتكون من عنصرين أحدهما يسمى بالعنصر الأول والأخر يسمى بالعنصر الثانى .

إذا فرض أن العنصر الأول هو س والعنصر الثانى هو ص فأننا نكتب الزوج المرتب على الصورة (س ، ص) .

تعريف : حاصل الضرب **س** x **ص** للمجموعتين **س** ، **ص** هو المجموعة المكونة من جميع الأزواج المرتبة التى ينتمى العنصر الأول فى كل منها الى **س** وينتمى العنصر الثاني إلى **ص** ، أى

س x **ص** = { (س ، ص) : س ∈ **س** ، ص ∈ **ص** }

حاصل الضرب **س** x **ص** يسمى أيضا بحاصل الضرب الكارتيزى للمجموعتين **س** ، **ص** .

ملاحظة (٧) : (أ) إذا كان عدد عناصر المجموعة **س** هو ن ، وعدد عناصر المجوعة **ص** هو م ، فان عدد عناصر المجموعة **س** x **ص** هو ن م .

(ب) إذا كانت **س** = ϕ أو **ص** = ϕ ، فان

س x **ص** = ϕ .

(جـ) إذا كانت إحدى المجموعتين غير منتهية والأخرى لاتساوى المجموعة الخالية ، فان **س** x **ص** هو مجموعة غير منتهية .

ملاحظة (٨) :

إذا كانت { **س**$_{١}$ ، **س**$_{٢}$ ، ... ، **س**$_{ن}$ } هى عائلة من المجموعات ، فان حاصل الضرب الكارتيزى لتلك المجموعات يكتب على النحو التالى :

$$\text{س}_{١} \times \text{س}_{٢} \times \ldots \times \text{س}_{ن} = \prod_{م = ١}^{ن} \text{س}_{م}$$

وهو عبارة عن مجموعة جميع النونيات المرتبة

(س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ... ، س ن)

حيث

س$_{م}$ ∈ **س**$_{م}$ ، (م = ١ ، ٢ ، ... ، ن) .

مثال (٤) : إذا كانت

س = { أ ، ب } ، **ص** = { ١ ، ٢ ، ٣ } ،

ع = { جـ ، د }

فان :

س x **ص** x ع = { (أ ، ١ ، جـ) ، (أ ،١ ، د) ، (أ، ٢ ، جـ) ، (أ ، ٢ ، د) ، (أ ، ٣ ،جـ) ، (أ ، ٣ ، د) ، (ب ، ١ ،جـ)،(ب،١ ، د) ، (ب،٢ ،جـ) ، (ب ، ٢، د) ، (ب، ٣،جـ) ، (ب،٣ ، د) }

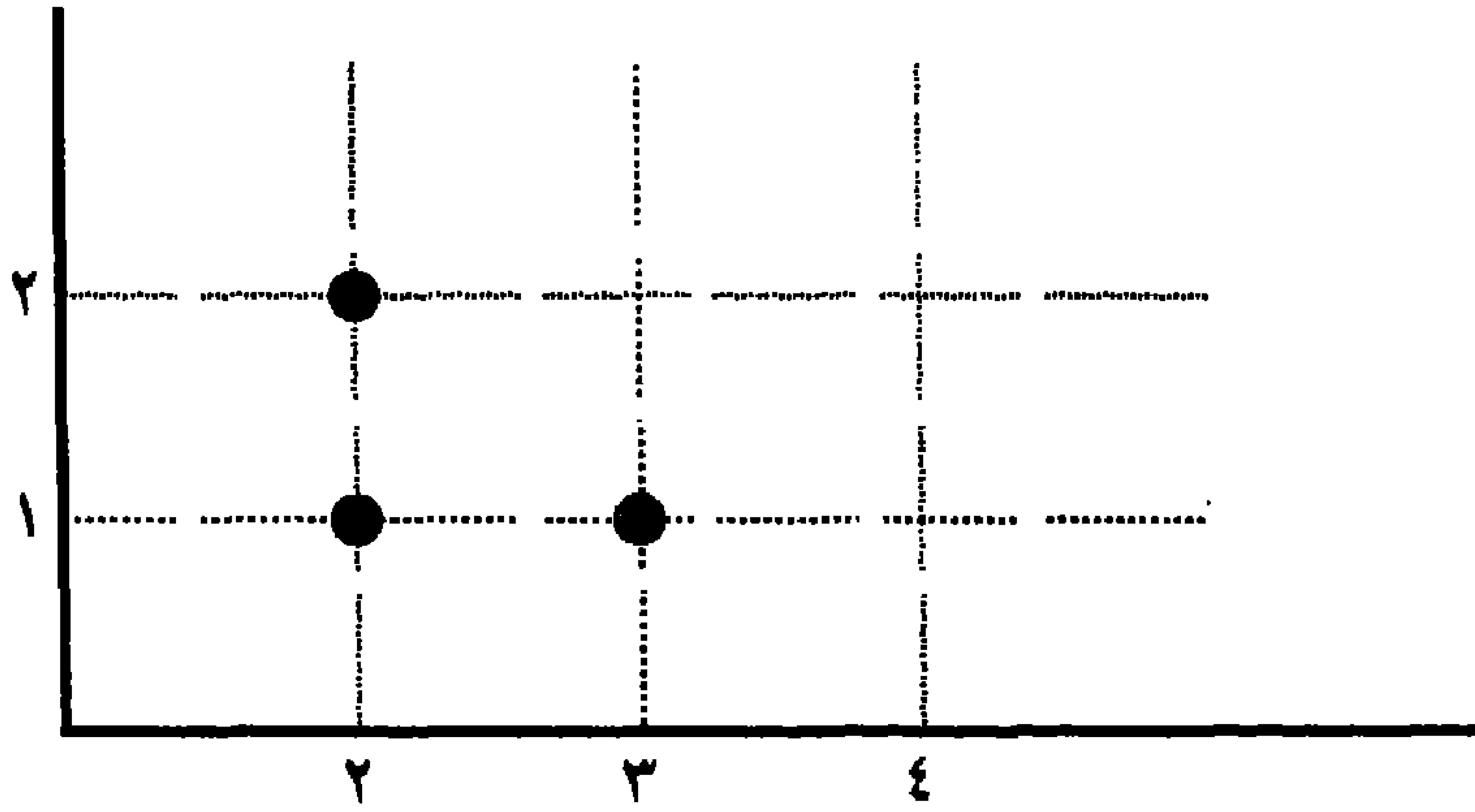
١-٢ : المفهوم العام للعلاقة

إذا كانت **س ، ص** مجموعتين غير خاليتين ، وكانت ع ⊂ **س** x **ص** فاننا نقول أن ع علاقة من **س** إلى **ص** . وإذا كان (س ، ص) ∈ع فأننا نقول أن " س فى العلاقة ع مع ص " ونكتب ذلك باختصار س ع ص . وإذا كانت ع⊂ **س** x **س** فأننا نقول أن ع علاقة على المجموعة **س** .

مثال (٥) :

إذا كانت **س** = { ٢ ،٣، ٤ } ، **ص** = { ١ ، ٢ } ، فان المجموعة التالية ع تمثل علاقة :

ع = { (٢، ١) ، (٢، ٢) ، (٣، ١) }



شكل (١ - ٢)

شكل (١-٢) يوضح الشكل الهندسى لتلك العلاقة .

يلاحظ أن :

٢ ع ١ ، ٣ ع ٢ ، ٣ ع ١ ، ٣ ع ١ .

. ٢ع١ ، ٣ع٢ ، ٣ع١ ، ٣ع١ .

تعريف : إذا كانت ع علاقة من **س** x **ص** ، فان معكوسها ع$^{-1}$ يعرف على الوجه التالى:

ع$^{-1}$ = { (ص ، س) : (س ، ص) ∋ ع }

مثال (٦) :

إذا كانت العلاقة

ع = { (١، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) }

معرفة على **س** = {١ ، ٢، ٣ } ، فان

ع$^{-1}$ = { (٢ ،١) ، (٣ ،١) ، (٣ ،٢) }

تعريف :

إذا كانت ع ⊂ **س** x **ص** ، فان

(أ) نطاق العلاقة ع هو المجموعة

ن = { س : س ∋ **س** ؛ (س ، ص) ∋ ع }

(ب) مدى العلاقة ع هو المجموعة

م = { ص : ص ∋ **ص** ؛ (س ،ص) ∋ ع }

١-٢-١ : علاقة التكافؤ

دراستنا لعلاقة التكافؤ تتطلب منا ذكر ثلاثة أنواع من العلاقات . والتعاريف التالية ستوضح مفهوم كل منها .

تعريف :

اذا كانت ع علاقة علي مجموعة غير خالية **س** فان ع تسمى علاقة عاكسة إذا كان :

س ع س ∀ س ∋ **س**

تعريف :

إذا كانت ع علاقة على مجموعه غير خالية **س** فان ع تسمى علاقة متماثلة إذا كان :

س ع ص ⇐ ص ع س   ∀ س ، ص ∋ **س**

تعريف :

إذا كانت ع علاقة على مجموعة غير خالية س فان ع تسمى علاقة متعدية إذا كان :

س ع ص ، ص ع ل ⇐ س ع ل ∀ س ، ص ، ل ∋ **س**

تعريف :

إذا كانت العلاقة ع المعرفة على المجموعة **س** عاكسة ومتماثلة ومتعدية ، فإنها تسمى علاقة تكافؤ على **س** .

مثال (٧) :

العلاقة ≥ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية

ط = { ١ ، ٢، ٣، ... } لا تمثل علاقة تكافؤ حيث أنها غير متماثلة (وإن كانت عاكسة ومتعدية) .

مثال (٨) :

إذا كانت ع، علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة

ى = { ٠ ، ± ١ ، ± ٢ ، ... }   حيث

س ع، ص ⇔ $\frac{س - ص}{٤}$ ∋ **ى**

أثبت أن ع، هى علاقة تكافؤ على ى .

الحل :

أ – نفرض أن س ∋ **ى**

أذن $\frac{س - س}{٤}$ ∋ **ى**

أى : س ع، س   ∀ س ∋ **ى** .

أى أن العلاقة ع، عاكسة .

ب–نفرض أن س ، ص ∋ **ى** ، س ع، ص .

أذن $\frac{س - ص}{٤}$ = م ∋ **ى** .

ولكن من خواص المجموعة ى نجد أن – م ∋ ى .

أى : $-\left(\frac{س - ص}{٤}\right) \ni ى$

اذن: $\frac{ص - س}{٤} \ni ى$ أى : ص $ع_٤$ س

بالتالى فان العلاقة $ع_٤$ متماثلة .

جـ– نفرض أن س ، ص، ع ∋ ى وأن س $ع_٤$ ص ، ص $ع_٤$ ع .

أذن: $\frac{س - ص}{٤} \ni ى$ ، $\frac{ص - ع}{٤} \ni ى$

ومن خواص المجموعة ى نجد أن :

$$\frac{س - ص}{٤} + \frac{ص - ع}{٤} \ni ى$$

أى: $\frac{س - ع}{٤} \ni ى$ ومن ثم نجد : س $ع_٤$ ع

بالتالى ، فان العالقة $ع_٤$ متعدية .

وحيث أن $ع_٤$ عاكسه ومتماثلة ومتعدية ، أذن فهى علاقة تكافؤ .

١–٢–٢ : فصول التكافؤ

إذا كانت ع علاقة تكافؤ على المجموعة **س** فان فصل التكافؤ [س] لأي عنصر س ∋ **س** هو :

[س] = {ص: (س ،ص) ∋ ع }

عائلة فصول التكافؤ **س** /ع هي :

س /ع = { [س] : س ∋ **س** } .

مثال (٩) : أوجد فصول التكافؤ للعلاقة $ع_٤$ المعرفة فى مثال (٨) .

الحل :

$ى_٠$ = [٠] = {... ، ١٢،٨،٤،٠،–٤،–٨،–١٢، ... }

$ى_١$ = [١] = {... ،١٣،٩ ،٥،١،–٣،–٧،–١١، ... }

$ى_٢$ = [٢] = {...،١٤،١٠،٦ ،٢،–٢،–٦،–١٠،...}

$ى_٣ = [٣] = \{ ...، ١٥، ١١، ٧، ٣، -١، -٥، -٩، ... \}$

ويلاحظ أن :

$ى_٤ = [٤] = [٠] = ى_٠$.

$ى_٥ = [٥] = [١] = ى_١$

$ى_٦ = [٦] = [٢] = ى_٢$

$ى_٧ = [٧] = [٣] = ى_٣$ وهكذا ...

كذلك فان :

العائلة $ى / ع_٤ = \{ ى_٠، ى_١، ى_٢، ى_٣ \}$.

١-٣ :مفهوم الراسم

الراسم $ر$ هو علاقة من المجموعة **س** الى المجموعة **ص** يقترن فيها كل عنصر فى **س** بعنصر واحد فقط فى **ص** ، ويكتب فى الصورة :

$ر$: **س** ← **ص**

وتسمى المجموعة **س** نطاق الراسم ، والمجموعة **ص** النطاق المصاحب.

إذا كان س ∈ **س** ، فان $ر$ (س) ∈ **ص** تسمى صورة العنصر س بالراسم $ر$.

المجموعة الجزئية من **ص** التى تتألف من جميع صور عناصر **س** بالراسم $ر$ تسمى مدى الراسم وسيرمز له بالرمز $ر$ [س] أى :

$ر$ [س] = { $ر$ (س) : س ∈ **س** }.

مثال (١٠) : الراسم $ر$: ح ← ح المعرف بالقاعدة

$ر$ (س) = حا س ∀ س ∈ ح

هو راسم نطاقة ح ونطاقة المصاحب ح ومداه الفترة المغلقة [-١، ١] ⊃ ح

تعريف : الراسم $ر$: **س** ← **ص** يسمى

أ- **راسما أحاديا** : إذا كان للعناصر المختلفة فى **س** صورا مختلفة فى **ص** . أى لكل

$س_١$ ، $س_٢$ ∈ **س**، $س_١ \neq س_٢ \Leftarrow ر(س_١) \neq ر(س_٢)$

او $ر(س_١) = ر(س_٢) \Leftarrow س_١ = س_٢$.

ب–راسما **فوقيا** : إذا كان كل عنصر فى **ص** هو صوره لأحد عناصر **س** ، أى إذا كان

ر [**س**] = **ص** .

جـ – **تناظرا أحاديا** :إذا كان أحاديا وفوقيا .

مثال (١١) : إذا كان الراسم ر:ح ← ح معرف بالقاعدة

ر (س) = ٢س +١ ∀ س ∈ ح

فإننا نلاحظ أن :

أ– الراسم ر راسم أحادى لأن :

ر ($س_١$) = ر ($س_٢$) ⇐ ٢$س_١$ +١ = ٢$س_٢$ + ١

⇐ $س_١$ =$س_٢$ ∀$س_١$ ،$س_٢$ ∈ ح

ب–الراسم ر فوقى لأن :

بفرض ص ∈ ح ونحاول حل العلاقة

ص = ٢س + ١

أى : س = $\frac{١}{٢}$ (ص – ١)

أذن كل عنصر ص ∈ ح هو صوره للعنصر س ∈ ح ، أى ر[ح]=ح .

مثال (١٢) : إذا كان الراسم ر:ح ← ح معرف بالقاعدة

ر (س) = $س^٣$ ∀س ∈ ح

فإننا نلاحظ أن :

أ– الراسم ر راسم أحادى لأن :

ر ($س_١$) - ر ($س_٢$) ⇐ $س_١^٣$ - $س_٢^٣$ ⇐ $س_١^٣$ - $س_٢^٣$ = ٠ .

⇐ ($س_١$ - $س_٢$) ($س_١^٢$ + $س_١$ $س_٢$ + $س_٢^٢$) = ٠ .

⇐ $س_١$ - $س_٢$ أو ($س_١^٢$ + $س_١$ $س_٢$ + $س_٢^٢$) = ٠ .

ومعلوم أن المعادلة $س_١^٢$ + $س_١$ $س_٢$ + $س_٢^٢$ = ٠ . لا تعطى علاقة حقيقية بين $س_١$ ، $س_٢$.

أى أننا إذا اقتصرنا على القيم الحقيقية فان :

ر(س$_1$) = ر(س$_2$) $\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$ $\forall$ س$_1$ ، س$_2$ $\in$ ح .

ب- الراسم ر فوقى لأن :

بفرض ص $\in$ ح ونحاول حل العلاقة

ص = س^3

أى س = $\sqrt[3]{ص}$ أى ر[ح] = ح

تعريف :

الراسم ر : **س** ← **ص** يسمى راسماً ثابتاً اذا كان المدى ر[**س**] يتكون من عنصر واحد .

تعريف : الراسم ر : **س** ← **س** المعرف بالقاعدة ر(س) = س يسمى راسم الوحده وسيرمز له بالرمز I .

١-٣-١ : تحصيل الرواسم

إذا كان ر$_1$: **س** ← **ص**

ر$_2$: **ص** ← ع

راسمين ، فان الراسم

ر$_2$ o ر$_1$: **س** ← ع المعرف بالقاعدة :

(ر$_2$ o ر$_1$) (س) = ر$_2$ (ر$_1$ (س)) $\forall$ س $\in$ **س**

يسمى بمحصلة الراسمين ر$_1$ ، ر$_2$ على الترتيب.

١-٣-٢ : معكوس الراسم

إذا كان الراسم ر : **س** ← **ص** وكان العنصر ص $\in$ **ص** ، فان المجموعة

{ س : س $\in$ **س** ، ر(س) = ص } تسمى الصورة العكسية للعنصر ص تحت تأثير الراسم ر ويرمز لها بالرمز ر$^{-1}$(ص) ، أى :

ر$^{-1}$(ص) = { س : س $\in$ **س** ، ر(س) = ص }

وإذا كانت ع $\subset$ **ص** ، فان الصوره العكسية للمجموعة ع تحت تأثير الراسم ر هى :

$ر^{-1}(ع) = \{س : س \in$ **س** ، $ر(س) \in ع\}$

مثال (١٣) :

الراسم $ر : ح \leftarrow ح$ معرف القاعدة

$ر(س) = س^٢$

$ر^{-1}(٤) = \{٢ ، -٢\}$ ، $ر^{-1}(-٣) = \phi$

إذا كانت $ع = \{س : ٤ \leq س \leq ٩\}$ ، فان

$ر^{-1}(ع) = \{س : -٣ \leq س \leq -٢$ أو $٢ \leq س \leq ٣\}$

بوجه عام ،إذا كان الراسم $ر$: **س** $\leftarrow$ **ص** ، فان الصورة العكسية للعنصر ص $\in$ **ص** قد يكون المجموعة الخالية أو مجموعة مكونة من عنصر واحد أو مجموعة مكونة من اكثر من عنصر .

أما إذا كان الراسم $ر$ تناظراً أحاديا ، فان الصورة العكسية للعنصر ص $\in$ **ص** يكـــون مجموعـــة مكونة من عنصر واحد س $\in$ **س** بحيث $ر(س) = ص$.

وفى هذه الحاله يمكن تعريف راسم من **ص** إلى **س** يعين لكل عنصر ص $\in$ **ص** صورته العكســـية فى **س** ويرمز لهذا الراسم بالرمز $ر^{-1}$ وبصفة عامه سوف نحتفظ بالرمز $ر^{-1}$ للتعبير عن العلاقـــة العكسية للراسم $ر$ والتى تسمى بمعكوس الراسم $ر$.

مثال (١٤) :

إذا كانت **س** $= ح - \{٥\}$ ، **ص** $= ح - \{٢\}$ وكان الراسم

$ر$: **س** $\leftarrow$ **ص** معرفاً بالقاعدة

$$ر(س) = \frac{٢س + ١}{س - ٥}$$

أثبت أن $ر$ تناظر أحادى . كذلك أوجد معكوس هذا الراسم .

الحل :

نفرض أن $س_1$ ، $س_2$ ∋ **س**

أذن :

$$ر(س_1) = ر(س_2) \Leftarrow \frac{٢س_1 + ١}{س_1 - ٥} = \frac{٢س_2 + ١}{س_2 - ٥}$$

$$\Leftarrow (٢س_1 + ١)(س_2 - ٥) = (٢س_2 + ١)(س_1 - ٥)$$

لأن $س_1 \neq ٥$ ، $س_2 \neq ٥$ ⇐ $س_1 = س_2$ أى أن الراسم ر أحادى .

لنفرض أن ص ∋ **ص** ونحاول حل العلاقة :

$$ص = \frac{٢س + ١}{س - ٥}$$

أى :

$$ص س - ٥ ص = ٢ س + ١$$

أى :

$$س (ص - ٢) = ٥ ص + ١$$

ومنها ينتج أن : $س = \frac{٥ص + ١}{ص - ٢}$

وبما أن الكسر فى العلاقة الأخيرة معرف مهما كانت ص ∋ **ص** لأن ص ≠ ٢ .أذن ، كل عنصر ص ∋ **ص** هو صوره للعنصر

$$س = \frac{٥ص + ١}{ص - ٢} ∋ \textbf{س} .$$

أى أن الراسم فوقى .

وبالتالى فان ر راسم تناظر أحادى .

ولإيجاد معكوس الراسم، نفرض أن $\text{ص} \in \textbf{ص}$.

إذن : $\text{ص} = \text{ر}(\text{س}) = \dfrac{\text{٢س} + ١}{\text{س} - ٥}$

وبالتالى :

$$\text{ر}^{-1}(\text{ص}) = \{\text{س} : \text{ر}(\text{س}) = \text{ص}\}$$

$$= \left\{\text{س} : \dfrac{\text{٢س} + ١}{\text{س} - ٥} = \text{ص}\right\}$$

أى :

$$\text{ر}^{-1}(\text{ص}) = \dfrac{\text{٥ص} + ١}{\text{ص} - ٢}$$

أذن الراسم العكسى هو :

$$\text{ر}^{-1}(\text{س}) = \dfrac{\text{٥س} + ١}{\text{س} - ٢}$$

ويلاحظ أن :

$$(\text{ر}^{-1} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{ر}^{-1}(\text{ر}(\text{س})) = \text{ر}^{-1}\left(\dfrac{\text{٢س} + ١}{\text{س} - ٥}\right)$$

$$= \dfrac{(\text{١٠س} + ٥) + (\text{س} - ٥)}{(\text{٢س} + ١) - ٢(\text{س} - ٥)} = \dfrac{\text{١١س}}{١١} = \text{س}$$

وهذا يؤكد صحة معكوس الراسم

ملاحظة (٩) :

إذا كان : $\text{ر}_1 : \textbf{س} \to \textbf{ص}$ ، $\text{ر}_2 : \textbf{ص} \to \text{ع}$ راسمى تناظر أحادى ، فان

$(ر_2 \circ ر_1)^{-1} = ر_1^{-1} \circ ر_2^{-1}$

١-٤: الزمرة

تعريف : العملية الثنائية على المجموعة **س** هى راسم نطاقه حاصل الضـــرب الكـــارتيزى **س** x **س**

ونطاقة المصاحب المجموعة **س** .

مثال (١٥) عملية الجمع على مجموعة الإعداد الصحيحة **ى** = { ٠ ، ±١ ، ±٢ ، ... }هى عمليـــة

ثنائية يمكن التعبير عنها كالتالى

ر : **ى** × **ى** ← **ى** حيث

ر (س ، ص) = س + ص

مثال (١٦) : إذا كان الراسم ر:ح × ح ← ح معرفا بالقاعدة

ر (س ، ص) = س − ص

فان (−) عملية ثنائية على المجموعة ح .

تعريف : الزوج (**س** ، *) حيث **س** مجموعة غير خالية ، * عملية ثنائية على **س** يسمى نظاماً ذا عملية ثنائية .

تعريف : النظام ذو العملية الثنائية (**س** ، *) يسمى زمره اذا كان هذا النظام يحقق الشروط التالية :

(١) * عملية دامجه :

(س * ص) * ع = س * (ص * ع)   ∀ س ، ص ، ع ∈ **س** .

(٢) يوجد عنصر محايد م ∈ **س** بحيث

س * م = م * س = س   ∀ س ∈ **س**

(٣) ∀ س ∈ **س** يوجد المعكوس س$^{-1}$ ∈ **س** بحيث

س * س$^{-1}$ = س$^{-1}$ * س = م

وبتوضيح آخر نقول أن النظام ذو العملية الثنائية * يسمى زمره اذا كان هذا النظام (١) دامجاً (٢) به عنصر محايد (٣) يحقق خاصية المعكوس .

ملاحظه (١٠) :

اذا تحققت بالاضافة الى الشروط السابقة فى التعريف السابق خاصيه الابدال :

س * ص = ص * س   ∀ س ، ص ∈ **س** .

فان الزمره تسمى زمره إبدالية .

مثال (١٧) : أثبت أن النظام ($س_{٢×٢}$ ، *) زمره حيث $س_{٢×٢}$ هى مجموعة المصفوفات المربعة ٢×٢ الغير شاذة وأن * هى عملية ضرب المصفوفات .

(المصفوفة الغير شاذه هى المصفوفة التى محددها لا يساوى صفراً) .

الحل :

نفرض أن α ، β ، γ $\in$ $س_{٢×٢}$ حيث .

$$\alpha = \begin{pmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ ج_{١} & د_{١} \end{pmatrix} \quad ، \quad أ_{١}د_{١} - ب_{١}ج_{١} \neq ٠ .$$

$$\beta = \begin{pmatrix} أ_{٢} & ب_{٢} \\ ج_{٢} & د_{٢} \end{pmatrix} \quad ، \quad أ_{٢}د_{٢} - ب_{٢}ج_{٢} \neq ٠ .$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} أ_{٣} & ب_{٣} \\ ج_{٣} & د_{٣} \end{pmatrix} \quad ، \quad أ_{٣}د_{٣} - ب_{٣}ج_{٣} \neq ٠ .$$

أذن:

$$١- \quad \alpha * \beta = \begin{pmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ ج_{١} & د_{١} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} أ_{٢} & ب_{٢} \\ ج_{٢} & د_{٢} \end{pmatrix} \in س_{٢×٢}$$

$$= \begin{pmatrix} أ_{١}أ_{٢} + ب_{١}ج_{٢} & أ_{١}ب_{٢} + ب_{١}د_{٢} \\ ج_{١}أ_{٢} + د_{١}ج_{٢} & ج_{١}ب_{٢} + د_{١}د_{٢} \end{pmatrix} .$$

أى أن * عملية ثنائية على المجموعة $س_{٢×٢}$.

٢– العملية * دامجه لأن :

٣– المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ هى المصفوفة المحايدة للمجموعة $س_{٢×٢}$ لأن :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ ج_١ & د_١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ ج_١ & د_١ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ ج_١ & د_١ \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ ج_١ & د_١ \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{-١} = \frac{١}{أ_١ د_١ - ب_١ ج_١} \begin{pmatrix} د_١ & -ب_١ \\ -ج_١ & أ_١ \end{pmatrix} \in س_{٢×٢}$$

هو معكوس المصفوفة α .

أى أن كل عنصر فى المجموعة س له معكوس .

وعلى سبيل المثال ، اذا كانت

$$\alpha = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} \quad \text{فان} \quad \alpha^{-١} = \frac{١}{١١} \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

لأن : $\alpha^{-١} * \alpha = \frac{١}{١١} \begin{pmatrix} ١١ & ٠ \\ ٠ & ١١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ٥

٥- * لا تمثل عملية إبدالية ، أى أن :

$$\alpha * \beta \neq \beta * \alpha$$

اذن النظام ($\mathbf{س}_{2\times2}$ ، *) زمره غير إبدالية .

١-٥ : الفراغ الاتجاهى ثنائى البعد

اذا نظرنا الى تعريف حاصل ضرب مجموعتين [انظر بند (١-١-٦)] ،ووضعنا

س = **ص** = ح (حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية) ، فان

ح × ح = { (س ، ص) : س ∋ ح ، ص ∋ ح }

وسوف نرمز للمجموعة ح x ح بالرمز $ح^{٢}$.

تعريف :

١ - لكل أ = ($س_١$ ، $ص_١$) ∋ $ح^٢$ ، ب = ($س_٢$ ،$ص_٢$) ∋ $ح^٢$ ، يعرف مجموع أ ، ب على أنه :

أ + ب = ($س_١$ + $س_٢$ ، $ص_١$ + $ص_٢$) ∋ $ح^٢$

٢- لكل أ = (س ، ص) ∋ $ح^٢$ ، لكل ك ∋ ح ، يعرف ضرب أ فى ك على أنه :

ك أ = (ك س ، ك ص) ∋ $ح^٢$

المجموعة $ح^٢$ مع عمليتى الجمع والضرب المشار إليهما فى التعريف السابق <u>تسمى</u> **<u>فراغ اتجاهى حقيقى ثنائى البعد</u>** . وعناصر هذا الفراغ تسمى متجهات ثنائية البعد . سنرمز لهذه المتجهات بـــالرمز $\bar{أ}$ ، $\bar{ب}$ ، $\bar{ج}$

تعريف : المتجهان $\bar{أ}$ = ($أ_١$ ، $أ_٢$) ∋ $ح^٢$ ، $\bar{ب}$ = ($ب_١$ ، $ب_٢$) ∋ $ح^٢$ يكونان متساويان اذا وفقط اذا $أ_١$ = $ب_١$ ، $أ_٢$ = $ب_٢$.

فيما يلى ، سنورد **خواص عملية الجمع** " + " المعرفه على المجموعة $ح^٢$.

١- $\bar{أ}$ + $\bar{ب}$ ∋ $ح^٢$ ، ∀ $\bar{أ}$ ، $\bar{ب}$ ∋ $ح^٢$ (خاصية الانغلاق)

٢- $(\overline{أ}+\overline{ب})+\overline{ج} = \overline{أ}+(\overline{ب}+\overline{ج})$ ، $\forall\ \overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{ج} \in ح^{2}$.

(خاصيـــة الدمـــــج)

٣- المتجه (صفر ، صفر) $\in ح^{2}$ يرمز له بالرمز $\overline{٠}$ وهو يحقق :

$$\overline{أ}+\overline{٠} = \overline{٠}+\overline{أ} = \overline{أ} \quad ، \quad \forall\ \overline{أ} \in ح^{2}$$

(خاصية العنصر المحايد)

المتجه $\overline{٠}$ = (٠ ، ٠) يسمى المتجه الصفرى.

٤- اذا كان $\overline{أ} = (أ_{١} ، أ_{٢}) \in ح^{2}$ ، فان المتجه

$(-١)\ \overline{أ} = (-أ_{١} ، -أ_{٢})$

يرمز له بالرمز $-\overline{أ}$ ويحقق

$$\overline{أ}+(-\overline{أ}) = (-\overline{أ})+(\overline{أ}) = \overline{٠}$$

المتجه $-\overline{أ}$ هو المعكوس الجمعى للمتجه $\overline{أ}$.

(خاصية المعكوس)

٥- $\overline{أ}+\overline{ب} = \overline{ب}+\overline{أ}$ ، $\forall\ \overline{أ}$ ، $\overline{ب} \in ح^{2}$

(خاصية الابدال)

أما عملية ضرب المتجهات فى عدد حقيقى فانها تحقق الخواص الأتية :

١- $ك\ (\overline{أ}+\overline{ب}) = ك\ \overline{أ} + ك\ \overline{ب}$ ، $\forall\ \overline{أ}$ ، $\overline{ب} \in ح^{2}$ ، $ك \in ح$

(خاصية التوزيع)

٢- $(ك_1 + ك_2)\,\bar{أ} = ك_1\,\bar{أ} + ك_2\,\bar{أ}$ ، $\forall\ \bar{أ} \in ح^2$ ؛ $ك_1 ، ك_2 \in ح$.

(خاصية التوزيع)

٣- $(ك_1 ك_2)\,\bar{أ} = ك_1\,(ك_2\,\bar{أ})$ ، $\forall\ \bar{أ} \in ح^2$ ؛ $ك_1 ، ك_2 \in ح$.

(خاصية الدمج)

٤- $ك\,\bar{أ} = ك\,\bar{ب} \Leftrightarrow \bar{أ} = \bar{ب}$ ، $\forall\ \bar{أ} ، \bar{ب} \in ح^2$ ، $ك \in ح - \{٠\}$.

(خاصية الحذف)

اذا كان $\bar{i} = (١ ، ٠) \in ح^2$ ، $\bar{j} = (٠ ، ١) \in ح^2$ فانه يمكن كتابة أى متجه $\bar{أ} = (أ١ ، أ٢) \in ح^2$ بدلاله كل من المتجهين $\bar{i}$ ، $\bar{j}$ على النحو التالى :

$$\bar{أ} = (أ_1 ، أ_2) = (أ_1 ، ٠) + (٠ ، أ_2)$$
$$= أ_1 (١ ، ٠) + أ_2 (٠ ، ١)$$
$$= أ_1\,\bar{i} + أ_2\,\bar{j}$$

تعريف : اذا كان $\bar{أ} = (أ_1 ، أ_2) \in ح^2$ ، $\bar{ب} = (ب_1 ، ب_2) \in ح^2$ ، فان حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\bar{أ}$ ، يعرف على أنه العدد الحقيقى

$$\bar{أ} \cdot \bar{ب} = أ_1 ب_1 + أ_2 ب_2$$

تعريف : اذا كان $\bar{أ} = (أ١ ، أ٢) \in ح^2$ ، فان طول $\bar{أ}$، ويرمز له بالرمز $\|\bar{أ}\|$ ، **يعرف كالتالى**

$$\|\bar{أ}\| = \sqrt{أ_1^2 + أ_2^2} = \sqrt{\bar{أ} \cdot \bar{أ}}$$

ملاحظة (١١) :من التعريف السابق نرى أن :

(١) $\|\bar{أ}\| \geq ٠$.

(٢) $\|\bar{أ}\| = ٠ \Leftrightarrow \bar{أ} = \bar{٠}$ ؛

(٣) $\|ك\bar{أ}\| = |ك| \, \|\bar{أ}\|$ ، $\forall$ $\bar{أ}$ $\in$ ح^{٢} ، ك $\in$ ح .

مثال (١٨) :

١- $\bar{i} \cdot \bar{i} = (١ ، ٠) \cdot (١ ، ٠) = ١$

٢- $\bar{j} \cdot \bar{j} = (٠ ، ١) \cdot (٠ ، ١) = ١$

٣- $\bar{i} \cdot \bar{j} = (١ ، ٠) \cdot (٠ ، ١) = ٠$

٤- $\|\bar{i}\| = \sqrt{(١)^{٢} + (٠)^{٢}}$

٥- $\|\bar{j}\| = \sqrt{(٠)^{٢} + (١)^{٢}}$

تعريف : أى متجه طوله الواحد الصحيح يسمى <u>متجة الوحده</u> .

بالنظر الي مثال (١٨) يتضح أن المتجهين $\bar{i}$ ، $\bar{j}$ يكونان متجهى وحده .

تعريف : يقال لمجموعة من المتجهات $\bar{أ}_{١}$ ، $\bar{أ}_{٢}$ ، ... ، $\bar{أ}_{ر}$ أنــها مســتقلة خطيا اذا كان :

ك$_{١}\bar{أ}_{١}$ + ك$_{٢}\bar{أ}_{٢}$ + ... + ك$_{ر}\bar{أ}_{ر} = \bar{0}$ ك$_{١}$ = ك$_{٢}$ = ... = ك$_{ر}$ = ٠

اذا كانت مجموعة المتجهات $\bar{أ}_{١}$ ، $\bar{أ}_{٢}$ ، ... ، $\bar{أ}_{ر}$ غير مستقلة خطيا ، فانه يقــال أنها مرتبطة خطيا .

مثال (١٩) : المتجهان $\bar{i}$ ، $\bar{j}$ مستقلان خطيا ، وذلك لان

ك$_{١}\bar{i}$ + ك$_{٢}\bar{j} = \bar{0}$ $\Leftarrow$ ك$_{١}$ (١،٠) + ك$_{٢}$(٠،١) = (٠،٠)

$\Leftarrow$ (ك$_{١}$ ،٠) + (٠، ك$_{٢}$) = (٠،٠)

$\Leftarrow$ (ك$_{١}$ ،ك$_{١}$) = (٠،٠)

$\Leftarrow$ ك$_{١}$ = ٠ ، ك$_{٢}$ =٠

ملاحظة(١٢) : الشرط الضرورى والكافىء لكى يكون المتجهين $\bar{أ}$ = (أ$_{١}$،أ$_{٢}$) ،

$\overline{ب} = (ب_1، ب_2)$ مستقلين خطيا هو : $أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1 \neq 0$

مثال(٢٠) : المتجهان $\overline{أ} = (١،٢)$ ، $\overline{ب} = (٢،٤)$ مرتبطان خطيا ، لأن

$$٢ \overline{أ} - \overline{ب} = ٠$$

أى $\overline{ب} = ٢ \overline{أ}$

حيث $ك_1 = ٢$ ، $ك_2 = -١$ وكلاهما لا يساوى الصفر .

ملاحظة (١٣) : اذا كانت هـ هى الزاوية بين المتجهين $\overline{أ}$ ، $\overline{ب} \in ح^2$ ، فان

$$جتا هـ = \frac{\overline{أ} \cdot \overline{ب}}{\|\overline{أ}\| \, \|\overline{ب}\|}$$

١-٦ : القطعة المستقيمة الموجهة

نفرض أن أ ، ب نقطتين فى المستوى "$ح^2$" . القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ هى المجموعة التى عناصرها أ ، ب وكل النقط الواقعة على الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ والمحصورة بين أ ، ب .

القطعة المستقيمة الموجهه من أ الى ب ، ويرمز لها بالرمز $\overleftarrow{أ ب}$ ، هى القطعة المستقيمة التى تبدأ من أ وتنتهى عند ب . النقطة أ تسمى نقطة البدء . النقطة ب تسمى نقطة النهاية .

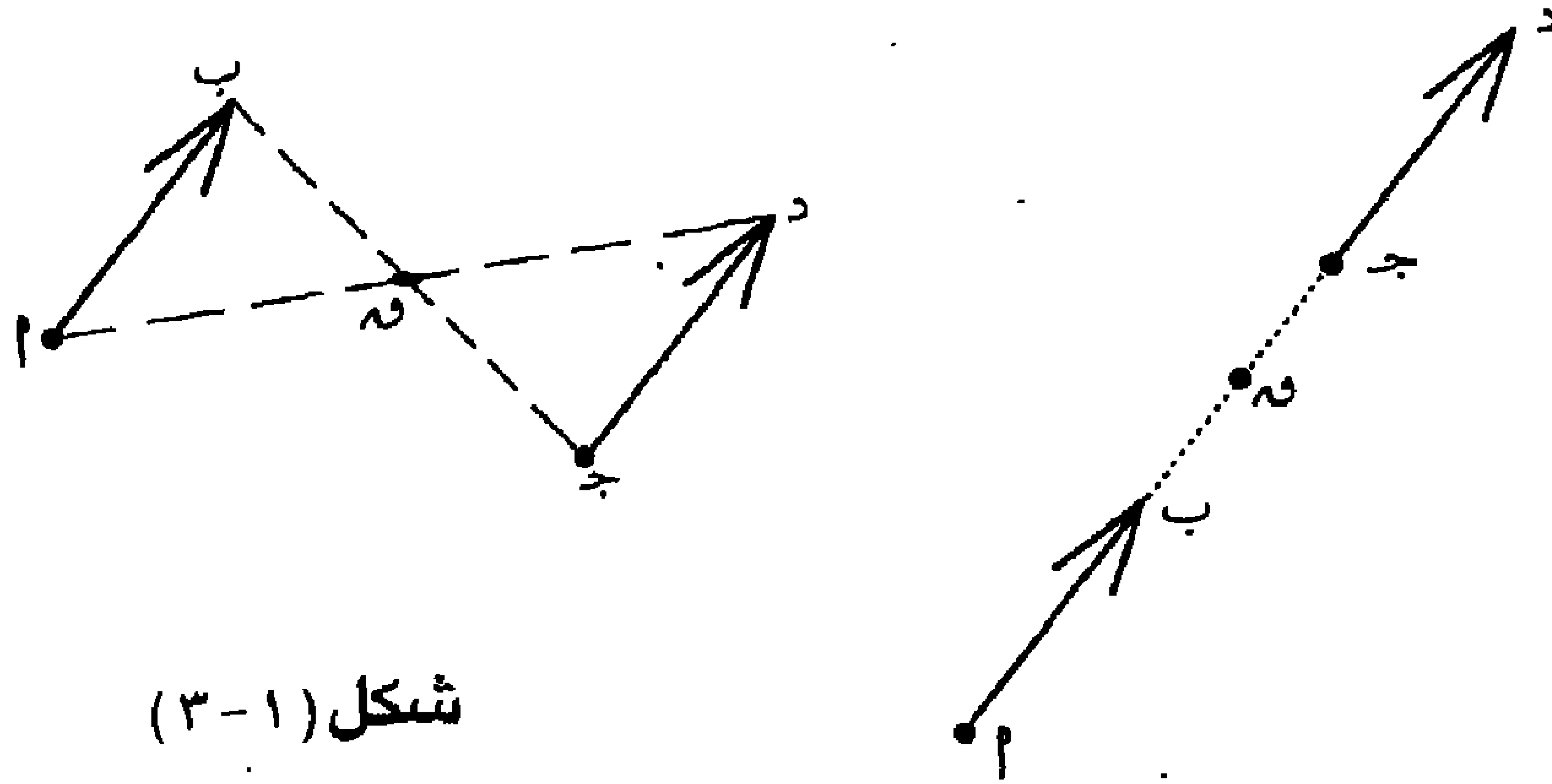
طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{أ ب}$ هو البعد بين النقطتين أ ، ب ،ويرمز له بالرمز $\|\overleftarrow{أ ب}\|$.

تعريف : يقال لقطعتين مستقيمتين موجهتين $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ أنهما متكافئتين اذا كان لهما نفس الطول والاتجاه .

عندما $\overleftarrow{أ ب}$ تكافئ $\overleftarrow{جـ د}$ ، فاننا نكتب $\overleftarrow{أ ب} \doteq \overleftarrow{جـ د}$

وبلغة آخرى ، فان $\overleftarrow{أ ب} \doteq \overleftarrow{جـ د}$ اذا كان لهما نفس الطول، ق هى منتصف كل من

أ د ، ب جـ (انظر شكل (١-٣)).



شكل (١-٣)

نظرية : إذا كانت أ ب ، جـ د قطع مستقيمة موجهه غير واقعة على استقامة واحده ، فان الشكل الرباعى أ ب د جـ يكون متوازى اضلاع اذا و فقط اذا أ ب ≐ جـ د

أ البرهان :

لنفرض أن أ ب ≐ جـ د . اذن ق هى منتصف كل من أ د ، ب جـ .يالتالى ، فان الأقطار أ د ، ب جـ للشكل الرباعى أ ب د جـ تتقاطع فى ق . اذن أ ب د جـ متوازى أضلاع

عكسيا ، اذا كان أ ب د جـ متوازى أضلاع ، فان الاقطار أ د ، ب جـ تتقاطع فى ق .
اذن أ ب ≐ جـ د .

نتيجة : اذا كان أ ب ≐ جـ د ، فان ‖أ ب‖ = ‖جـ د‖ ؛ أ ب ، جـ د إما متوازيان أو على استقامة واحده .

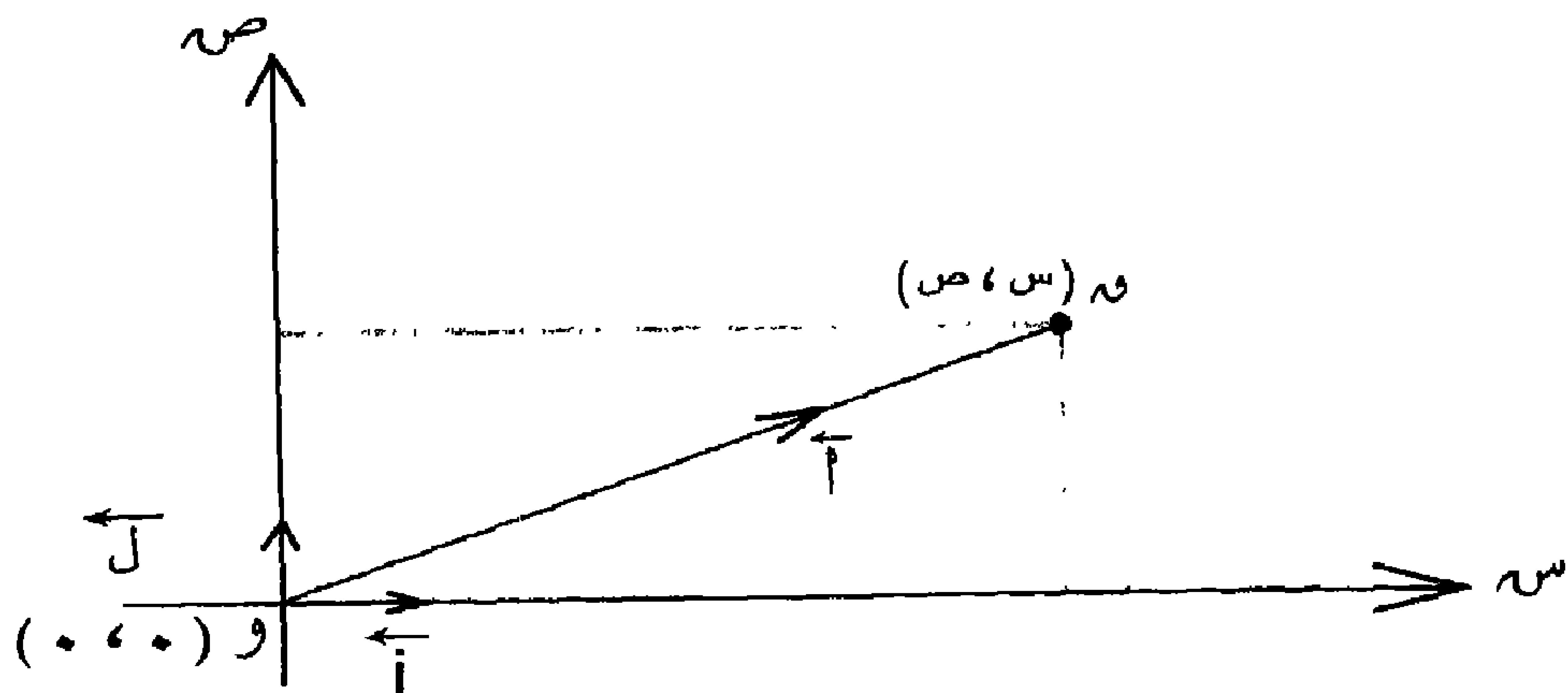
لا حظ أن عكس هذه النتيجه غير متحقق .

كل متجه يمكن تمثيلة هندسيا بقطعة مستقيمة موجهه طولها واتجاهها هما طول واتجاه المتجه . بهذا يمكن تمثيل أى متجه معطى بالعديد من القطع المستقيمة الموجهه وذلك حيث أن موقع القطعه المستقيمة ليس محددا ولكن المحدد هو فقط طولها واتجاهها .أى قطعتين مستقيمتين موجهتين متكافئتين تمثلان نفس المتجه ، وبالعكس اذا كانت القطعة المستقيمة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تمثل متجه معلوم فانه يمكن تمثيل نفس المتجه أيضا بقطعة مستقيمة موجهه $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ مكافئه للقطعة المستقيمة الموجهه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

اذا كانت القطعة المستقيمة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ن}}$ ، فان القطعة المستقيمة الموجهه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ تمثل المتجه $-\overleftarrow{\text{ن}}$.

دعنا نفترض الآن أن جميع المتجهات ثنائية البعد ستمثل بقطع مستقيمة تقع فى مستو ثابت . اذن من الممكن تعيين الاحداثيات لنقطتى بدايه ونهاية القطعة المستقيمة الممثلة لأى متجه . سنفترض أننا أنشأنا نظاما للأحداثيات فى هذا المستوى فيه المحاور متعامده .

لاستخدام الإحداثيات الكارتيزية عند التعامل مع المتجهات ، فمن المفيد أن نعرف متجهى وحده $\overleftarrow{\text{ا}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ على إمتداد محورى الاحداثيات . سنأخذ اتجاه متجه الوحده $\overleftarrow{\text{ا}}$ فى الاتجاه الموجب لمحور السنيات واتجاه متجه الوحده $\overleftarrow{\text{ل}}$ فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات (شكل ١-٤) .



شكل (١ - ٤)

اذا كانت ق (س،ص) أى نقطه فى المستوى ، ونقطة الأصل ، فان القطعة المستقيمة الموجهه $\overleftarrow{\text{وق}}$ تسمى <u>متجه الموضع</u> للنقطة ق .

اذا كان $\bar{\text{أ}}$ هو المتجه الممثل بالقطعه المستقيمة الموجهه $\overleftarrow{\text{وق}}$ فانه يمكننا كتابة :

$$\bar{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{وق}} = \text{س}\,\bar{i} + \text{ص}\,\bar{i}$$

اذا كانت ق_1 (س_1 ، ص_1) ، ق_2 (س_2 ،ص_2) أى نقطتين فى المستوى .فان القطعة المستقيمة الموجهه

$$\overleftarrow{\text{ق}_1\text{ق}_2} = (\text{س}_2 - \text{س}_1 ، \text{ص}_2 - \text{ص}_1)$$

حيث أن

$$\overleftarrow{\text{وق}_1} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1) = \text{س}_1\,\bar{i} + \text{ص}_1\,\bar{i} ،$$

$$\overleftarrow{\text{وق}_2} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2) = \text{س}_2\,\bar{i} + \text{ص}_2\,\bar{i}$$

ومن قاعدة جمع المتجهات نعلم أن :

$$\overleftarrow{\text{وق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_1\text{ق}_2} = \overleftarrow{\text{وق}_2}$$

اذن

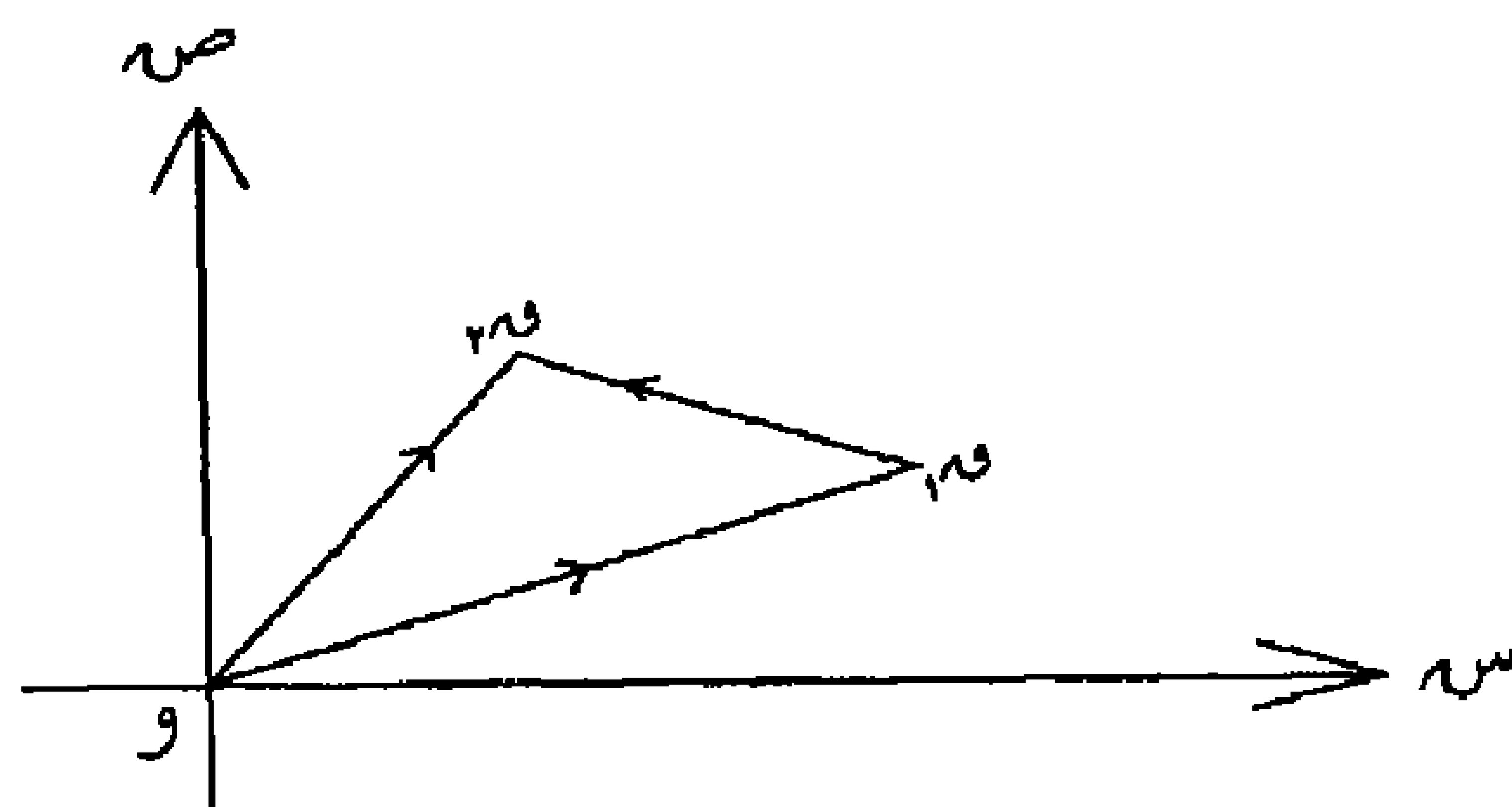
$$\overleftarrow{\text{ق}_1\text{ق}_2} = \overleftarrow{\text{وق}_2} - \overleftarrow{\text{وق}_1}$$

أى

$$\overleftarrow{\text{ق}_1\text{ق}_2} = (\text{س}_2\,\bar{i} + \text{ص}_2\,\bar{i}) - (\text{س}_1\,\bar{i} + \text{ص}_1\,\bar{i})$$

$$= (\text{س}_2 - \text{س}_1)\,\bar{i} + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)\,\bar{i}$$

$$= (\text{س}_2 - \text{س}_1 ، \text{ص}_2 - \text{ص}_1)$$



شكل (١ - ٥)

افرض أن متجه الموضع $\overleftarrow{وق}$ = (س ،ص) يمثل متجه $\bar{أ}$. المتجه أ يمكن تمثيله بأى قطعـــة مســتقيمة موجهه مكافئه لمتجه الموضع $\overleftarrow{وق}$ ونقطة بدايتها أى نقطة فى المستوى .

دعنا نوجد القطعة المستقيمة الموجهه التى نقطه بدايتها النقطة ك ($س_٠$ ، $ص_٠$) والممثلة للمتجه $\bar{أ}$.

لنفرض أن $ك'$($س_١$ ، $ص_١$) هى نقطة نهاية هذه القطعة المستقيمة الموجهه .

اذن، مما سبق ، نجد أن

$$\overleftarrow{ك ك'} = (س_١ - س_٠ ، ص_١ - ص_٠)$$

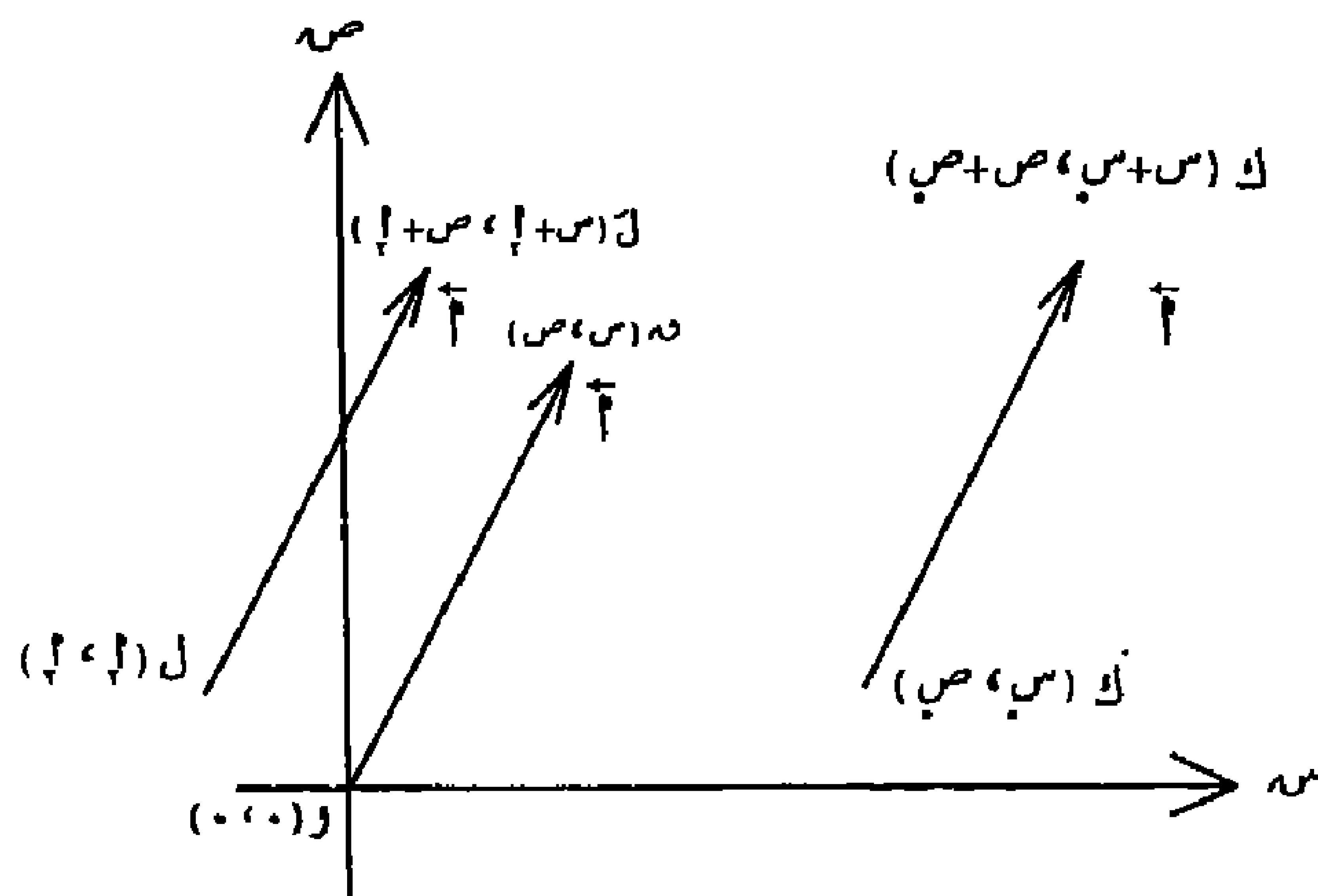
حيث أن هذه القطعة المستقيمة الموجهه تمثل نفس المتجه $\bar{أ}$ وبالتالى تكافؤ متجه الموضع $\overleftarrow{وق}$ = (س ، ص) ، فانه ينتج أن

$$س_١ - س_٠ = س \quad ، \quad ص_١ - ص_٠ = ص$$

أى أن

$$س_١ = س + س_٠ \quad ، \quad ص_١ = ص + ص_٠$$

اذن يمكن تمثل المتجه $\bar{أ}$ = (س، ص) بالقطعة المستقيمة الموجهه $\overleftarrow{ك ك'}$ ، حيث ك ($س_٠$ ،$ص_٠$) ، $ك'$ (س + $س_٠$ ، ص + $ص_٠$) . الشكل (١-٦) يوضح بعض التمثيلات الهندســـيه للمتجه $\bar{أ}$ = (س ، ص) .



شكل (١-٦)

يمكن أيضاً ملاحظة أنه بالرغم من أن المتجه $\overline{أ}$ (س ، ص) يمكن تمثيله هندسياً بأكثر من قطعة مستقيمة موجهه . إلا أنه يوجد متجه موضع واحد بالضبط مناظر للمتجه $\overline{أ}$.

ملاحظة (١٤) : اذا كانت $ق_١$(س١،ص١) ، $ق_٢$(س٢ ،ص٢) ، $ق_٣$(س٣،ص٣) نقط معطاه في المستوى ،فان :

$$ق(س_٣ + س_٢ - س_١ ، ص_٣ + ص_٢ - ص_١)$$

بحيث أن :

$$\overleftarrow{ق_٣ ق} \doteq \overleftarrow{ق_١ق_٢}$$

١-٧ : التحويله الهندسية

تعريف : الراسم $ر : ح^٢ \leftarrow ح^٢$ يسمى **<u>تحويلة خطية</u>** اذا كان

(١) $ر(\overline{أ} + \overline{ب}) = ر(\overline{أ}) + ر(\overline{ب})$ ؛ $\forall$ $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ $\in ح^٢$

(٢) $ر(ك\overline{أ}) = ك ر(\overline{أ})$ ؛ $\forall$ $\overline{أ}$ $\in ح^٢$ ، $ك \in ح - \{٠\}$

تعريف : الراسم $ر : ح^٢ \leftarrow ح^٢$ المتناظر أحادياً يسمى **<u>تحويله هندسية</u>** أو **<u>تحويله مستويه</u>** .

مثال (٢١) : أثبت أن الراسم $ر : ح^٢ \leftarrow ح^٢$ المعرف بالقاعده

$$ر(س، ص) = (س، س - ص)$$

هو تحويله خطيه .

الحل :

نفرض أن $\overline{أ} = (س_١، ص_١)$ ، $\overline{ب} = (س_٢، ص_٢)$

اذن :

$$\overline{أ} + \overline{ب} = (س_١، ص_١) + (س_٢، ص_٢) = (س_١ + س_٢ ، ص_١ + ص_٢)$$

بالتالى فان :

$$ر(\bar{أ} + \bar{ب}) = (س_1 + س_2 ، س_1 + س_2 - (ص_1 + ص_2))$$

$$= (س_1 + س_2 ، (س_1 - ص_1) + (س_2 - ص_2))$$

$$= (س_1 ، س_1 - ص_1) + (س_2 ، س_2 - ص_2)$$

$$= ر(\bar{أ}) + ر(\bar{ب})$$

أيضا ، اذا كان ك $\in$ ح - $\{0\}$ ، فان ك $\bar{أ}$ = ك (س$_1$، ص$_1$) = (ك س$_1$،ك ص$_1$)

بالتالى :

$$ر(ك \bar{أ}) = [ك س_1 ، ك (س_1 - ص_1)]$$

$$=ك (س_1 ، (س_1 - ص_1))$$

$$=ك ر(\bar{أ})$$

اذن ، ر تحويله خطيه .

مثال (٢٢) : الراسم ر :ح^2← ح^2 المعرف بالقاعده

ر (س، ص) = (س^2 ،٢ص) $\forall$ (س، ص) $\in$ح^2

لا يمثل تحويله مستوية (هندسية) لأن :

١- ر راسم غير احادى . فمثلاً : النقطة (٩،٤) تكون صوره لكل من النقطتـين (٣،٢) ، (-٣،٢)

٢- ر غير فوقى ، لأن النقطة (-٩،٣) مثلاً لا يمكن أن تكون صوره لأى نقطه (س، ص) فى المستوى .

مثال (٢٣) : ليكن الراسم ر :ح^2← ح^2 المعرف بالقاعده

$$ر(س،ص)=\left(\frac{س + \sqrt{3}ص}{2} ، \frac{\sqrt{3}س - ص}{2}\right)$$

١-هل الراسم تحويله خطيه؟

٢-هل الراسم تحويله هندسية (مستويه)؟

الحل :

نفرض أن $\vec{\text{أ}} = (\text{س}_1 \text{ ، } \text{ص}_1)$ ، $\vec{\text{ب}} = (\text{س}_2 \text{ ، } \text{ص}_2)$

اذن :

$$\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}} = (\text{س}_1 + \text{س}_2 \text{ ، } \text{ص}_1 + \text{ص}_2)$$

وبالتالى فان :

$$\text{ر}(\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}}) = \text{ر}(\text{س}_1 + \text{س}_2 \text{ ، } \text{ص}_1 + \text{ص}_2) =$$

$$\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \sqrt{3}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2)}{2} \text{ ، } \frac{\sqrt{3}(\text{س}_1 + \text{س}_2) - (\text{ص}_1 + \text{ص}_2)}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{\text{س}_1 + \sqrt{3}\,\text{ص}_1}{2} \text{ ، } \frac{\sqrt{3}\,\text{س}_1 - \text{ص}_1}{2} \right) + \left(\frac{\text{س}_2 + \sqrt{3}\,\text{ص}_2}{2} \text{ ، } \frac{\sqrt{3}\,\text{س}_2 - \text{ص}_2}{2} \right)$$

$$= \text{ر}(\vec{\text{أ}}) + \text{ر}(\vec{\text{ب}})$$

أيضاً ، اذا كان $\text{ك} \in \text{ح} - \{٠\}$ ، فان $\text{ك}\,\vec{\text{أ}} = \text{ك}(\text{س}_1 \text{ ، } \text{ص}_1)$

$$= (\text{ك س}_1 \text{ ، } \text{ك ص}_1)$$

وبالتالى :

$$\text{ر}(\text{ك}\,\vec{\text{أ}}) = \text{ر}(\text{ك س}_1 \text{ ، } \text{ك ص}_1)$$

$$= \left(\frac{\text{ك س}_1 + \sqrt{3}\,\text{ك ص}_1}{2} \text{ ، } \frac{\sqrt{3}\,\text{ك س}_1 - \text{ك ص}_1}{2} \right)$$

$$= \text{ك} \left(\frac{\text{س}_1 + \sqrt{3}\,\text{ص}_1}{2} \text{ ، } \frac{\sqrt{3}\,\text{س}_1 - \text{ص}_1}{2} \right) = \text{ك}\,\text{ر}(\vec{\text{أ}})$$

أذن الراسم ر هو تحويلة خطيه . كما أن هذا الراسم هو تحويله هندسية .

١-٨ : مصفوفة التحويل

ملاحظة (١٥) : الراسم $\text{ر} : \text{ح}^2 \to \text{ح}^2$ المعرف بالقاعدة

$$ر(س ، ص) = (سَ ، صَ)$$

حيث

$$سَ = أ س + ب ص \qquad (١)$$

$$صَ = ج س + د ص \qquad (٢)$$

يسمى **تحويلة خطية** فى المستوى .

المعادلتان (١) ، (٢) يمكن كتابتها فى الصورة :

$$\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix}$$

أى أن :

$$\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} \quad ، أ د - ب ج \neq ٠ .$$

هى المصفوفة التى تمثل هذا التحويل . وغالباً نسميها **مصفوفة التحويل** .

مثال (٢٤) : أوجد صوره المربع الذى رؤوسه هى النقط (٠،٠)،(١،٠)،(١،١)،(٠،١) تحت تأثير مصفوفة التحويل . $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$

الحل :

١- $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$

اذن صورة النقطة (٠،٠) هى (٠،٠)

٢- $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ \\ ج \end{pmatrix}$

اذن صوره النقطة (٠،١) هى (أ ، جـ)

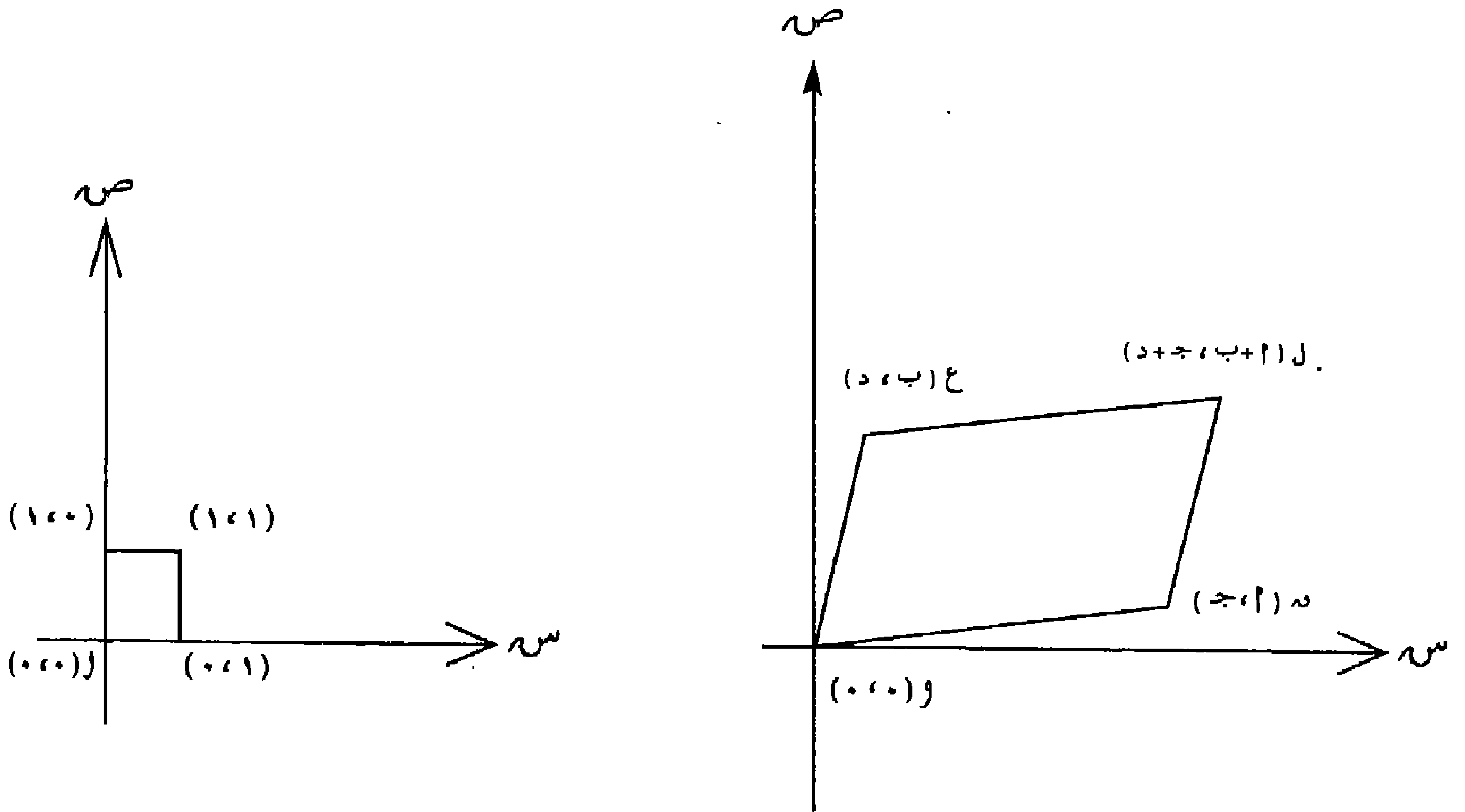
٣ - $$\begin{pmatrix}\text{أ}+\text{ب}\\ \text{ج}+\text{د}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١\\ ١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ب} & \text{أ}\\ \text{د} & \text{ج}\end{pmatrix}$$

اذن صورة النقطة (١،١) هى (أ + ب ، ج + د)

٤- $$\begin{pmatrix}\text{ب}\\ \text{د}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٠\\ ١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ب} & \text{أ}\\ \text{د} & \text{ج}\end{pmatrix}$$

اذن صورة النقطة (١،٠) هى (ب،د)

أى أن المربع الذى رؤوسة : (٠،٠) ، (٠،١) ، (١،١) ، (١،٠) يتحول الى متوازى الأضلاع الــذى رؤوسة هى النقط : (٠،٠) ، (أ ،ج) ، (أ + ب ، ج + د) ، (ب ، د) علىالــترتيب كمـا فى شكل (١-٧) . وواضح أن مساحة متوازى الأضلاع تختلف عن مساحة المربع .



شكل (١-٧)

مثال (٢٥) : أوجد صوره الدائرة

$$ه = \{ (س،ص) : س^{٢} + ص^{٢} = ١ \}$$

بالتحويلة التي مصفوفتها هي $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ك \end{pmatrix}$ ، ك ∋ (٠،١) .

الحل :

النقطة (حتا θ ، حا θ) ∋ ه

اذن : $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ك \end{pmatrix} \begin{bmatrix} حتا\,\theta \\ حا\,\theta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix}$

أى أن :

$$\begin{bmatrix} حتا\,\theta \\ ك\ حا\,\theta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix}$$

أى أن :

$$س = حتا\,\theta \qquad (١)$$

$$ص = ك\ حا\,\theta \qquad (٢)$$

بحذف البارامتر θ من (١) ، (٢) ، ينتج أن :

$$\frac{س'^{٢}}{١} + \frac{ص'^{٢}}{ك^{٢}} = ١$$

أى أن :

$$ه' = \{ (س'، ص') : \frac{س'^{٢}}{١} + \frac{ص'^{٢}}{ك^{٢}} = ١ ، ك ∋ (٠ ، ١) \}$$

وهى صوره الدائره ه . ويتبين أنها تمثل قطع ناقص طولا نصفى محوريه هما ١ ، ك والاختلافة المركزى $\sqrt{١ - ك^{٢}}$

ملاحظة (١٦) : فى المثال السابق ، اذا كانت الدائره

ـه = { (س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} }

فان صورتها ـه$'$ تحت تأثير المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ك \end{pmatrix}$ ، ك ∋ (٠،١)

تصبح :

ـه = { (س ،ص) : $\frac{س'^{٢}}{نق^{٢}}$ + $\frac{ص'^{٢}}{نق^{٢}ك^{٢}}$ =١ ، ك ∋ (٠،١)}

أى أن صوره الدائره ـه هى القطع الناقص ـه ؛ طولا نصفى محوريه هما

نق ، نق ك ، وأختلافه المركزى = $\sqrt{١ - ك^{٢}}$

مثال (٢٦) : أوجد صوره القطع الناقص

ـه = { (س ، ص) : $\frac{(س-١)^{٢}}{١٦}$ + $\frac{(ص-٢)^{٢}}{٩}$ = ١}

بالتحويلة التى مصفوفتها هى $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

الحل :

النقطة (٤ حتا θ +١ ، ٣حا θ + ٢) ∋ ـه

اذن

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤حتا \theta + ١ \\ ٣حا \theta + ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س' \\ ص' \end{bmatrix}$$

أى أن :

$$\begin{bmatrix} ٤ \text{ حتا } \theta + ١ \\ \frac{٣}{٢} \text{ حا } \theta + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س' \\ ص' \end{bmatrix}$$

وبالتالى :

س$'$ = ٤ حتا θ + ١

$$ص' = \frac{٣}{٢} \text{ جا } \theta + ١$$

بحذف البارامتر θ نجد أن

$$د' = \left\{ (س' ، ص') : \frac{(س' - ١)^٢}{١٦} + \frac{(ص' - ١)^٢}{\frac{٩}{٤}} = ١ \right\}$$

و هى تمثل قطع ناقص مركزة هو النقطة (١ ، ١) و طولا نصفى محورية هما ٤ ، $\frac{٣}{٢}$.

مثال ٢٧ : أوجد صورة القطع الذائد

$$د = \left\{ (س،ص) : \frac{س^٢}{٦٤} - \frac{ص^٢}{٣٦} = ١ \right\}$$

بالتحويلة التى مصفوفتها هى $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

الحل :

النقطة (٨قا θ ، ٦ طاθ) ∈ د

اذن :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٨\text{قا}\theta \\ ٦\text{ظا}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

أى أن :

$$\begin{bmatrix} ٨\text{قا}\theta \\ ٣\text{طا}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

وبالتالى:

$$\acute{س} = ٨ قا \theta \qquad (١)$$

$$\acute{ص} = ٣ طا \theta \qquad (٢)$$

بحذف البارامتر θ من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\frac{\acute{س}^{٢}}{٦٤} - \frac{\acute{ص}^{٢}}{٩} = ١$$

وبالتالى فان :

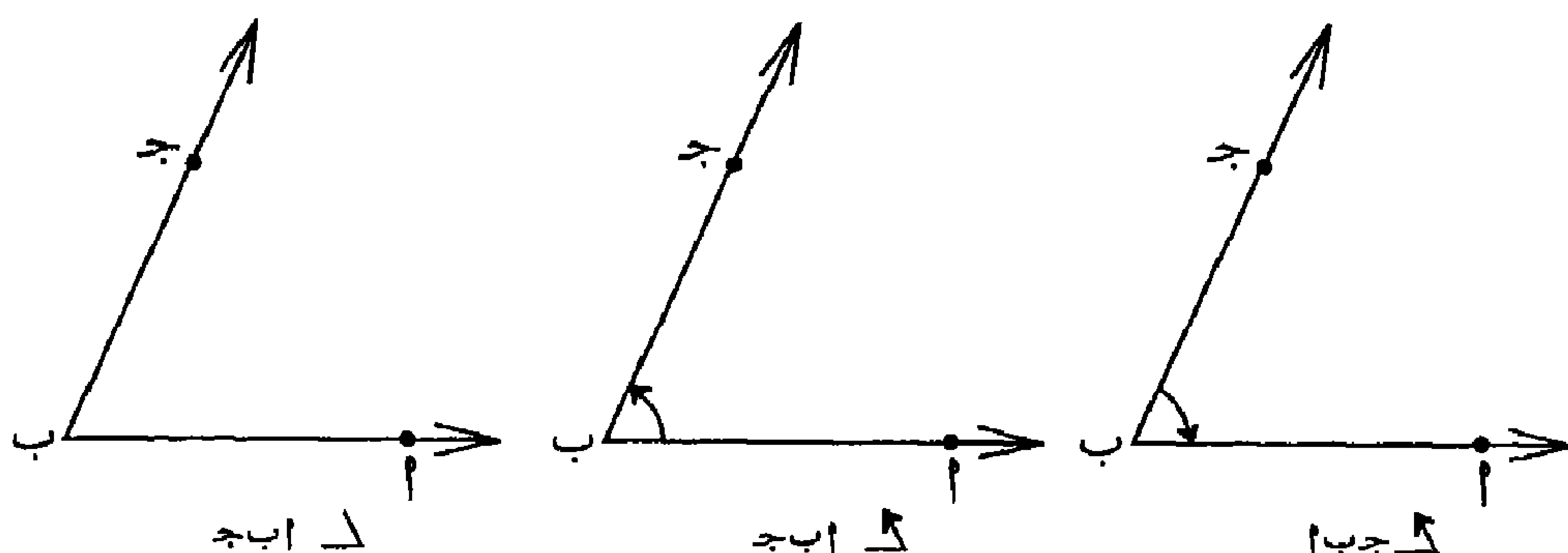
$$\acute{د} = \{ (\acute{س} ، \acute{ص}) : \frac{\acute{س}^{٢}}{٦٤} - \frac{\acute{ص}^{٢}}{٩} = ١ \}$$

وهى تمثل قطع زائد طولا نصفى محوريه هما ٨ ، ٣ واختلافه المركزى هو ١.٠٦٨

١-٩ : الزاويه الموجهه

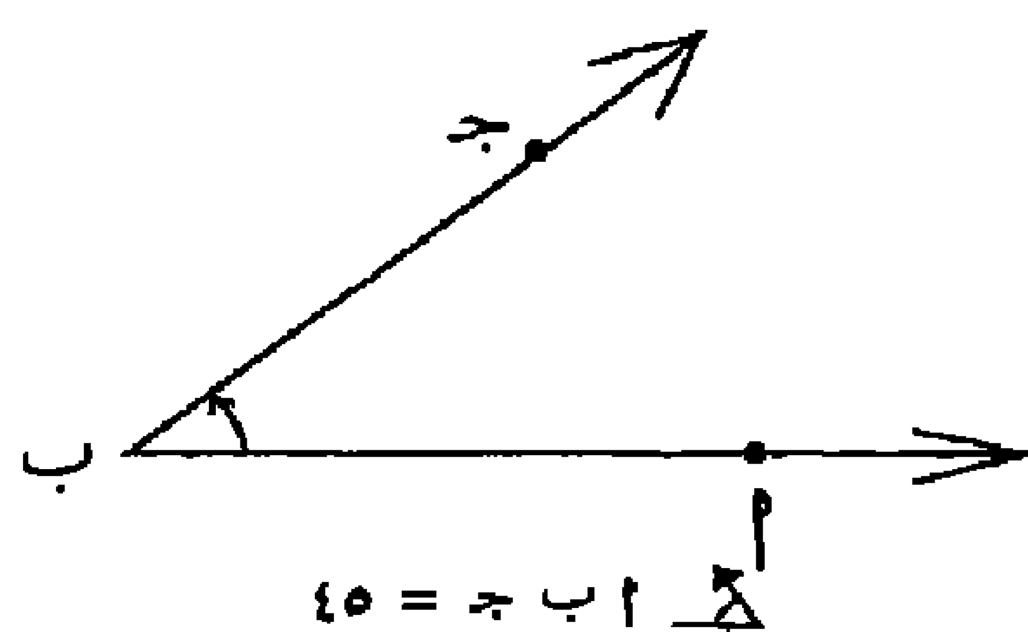
الزاويه الموجهه $\measuredangle$ أ ب جـ هى الزاويه المكونه من الشعاعين $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$. الشعاع $\overleftarrow{ب أ}$ يسمى بالجانب الأول بينما الشعاع $\overleftarrow{ب جـ}$ يسمى بالجانب الثانى .

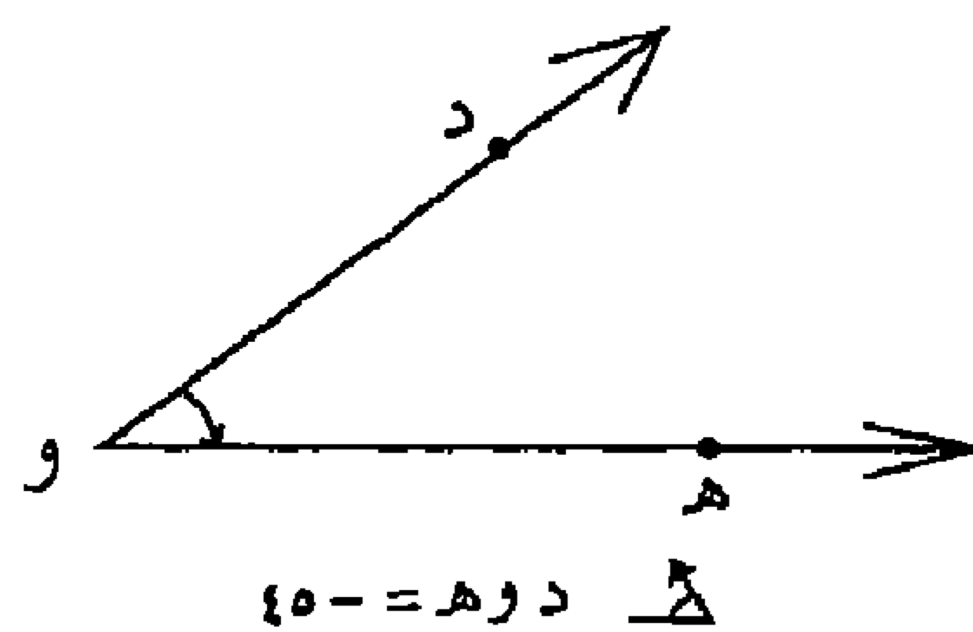
أما الزاويه الموجهه $\measuredangle$ جـ ب أ فيكون $\overleftarrow{ب ج}$ هو الجانب الأول بينما $\overleftarrow{ب أ}$ هو الجانب الثانى

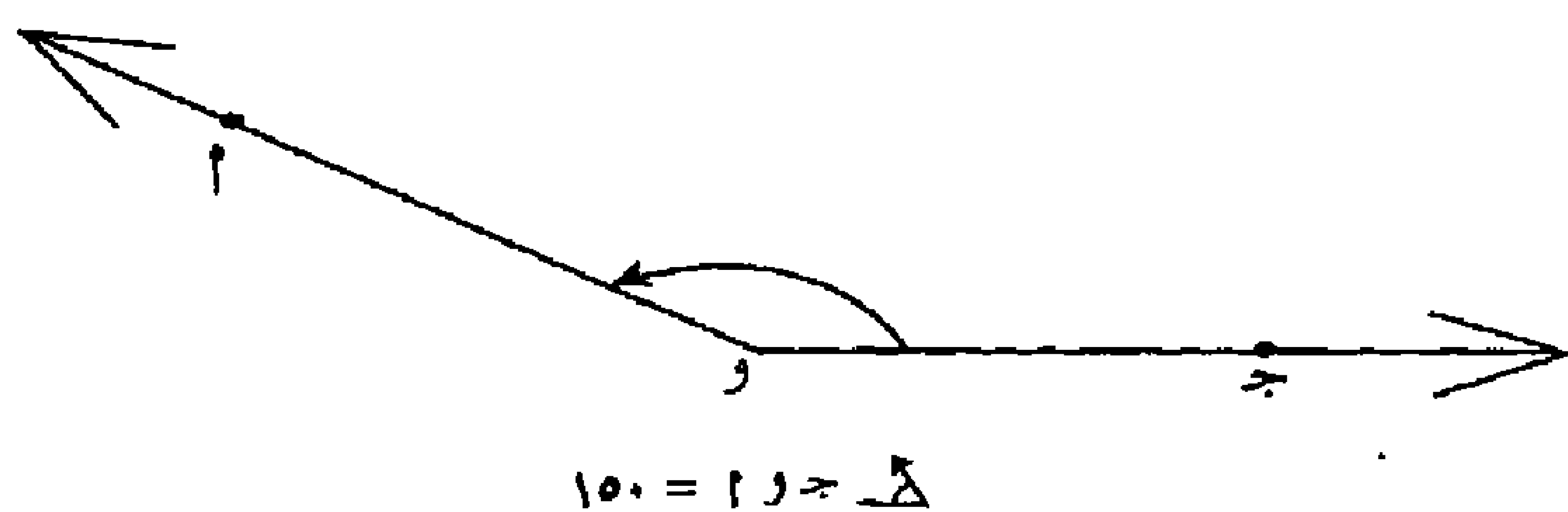


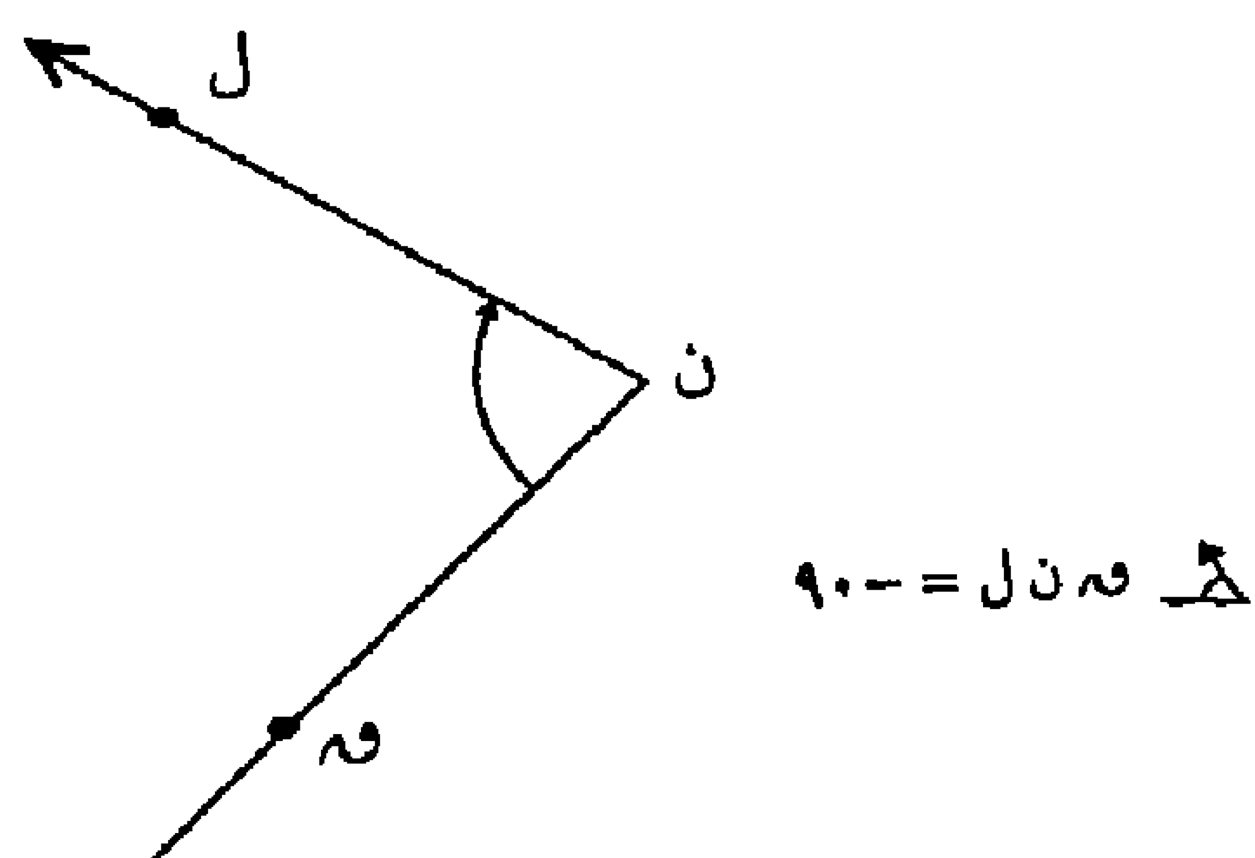
شكل (١ - ٨)

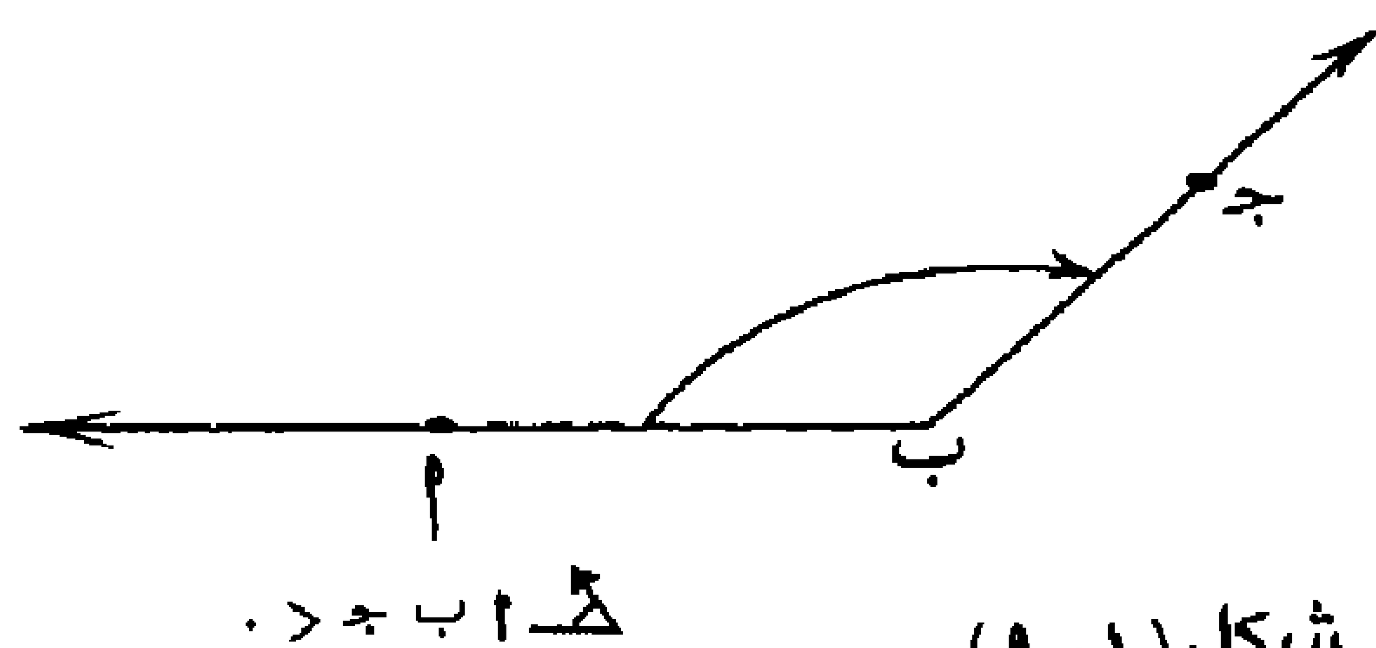
فى دراستنا للهندسة ، علمنا بأن ∡ أ ب جـ (تعنى مقياس الزاويه ∠ أ ب جـ) يكون بين صفر ، ١٨٠ .

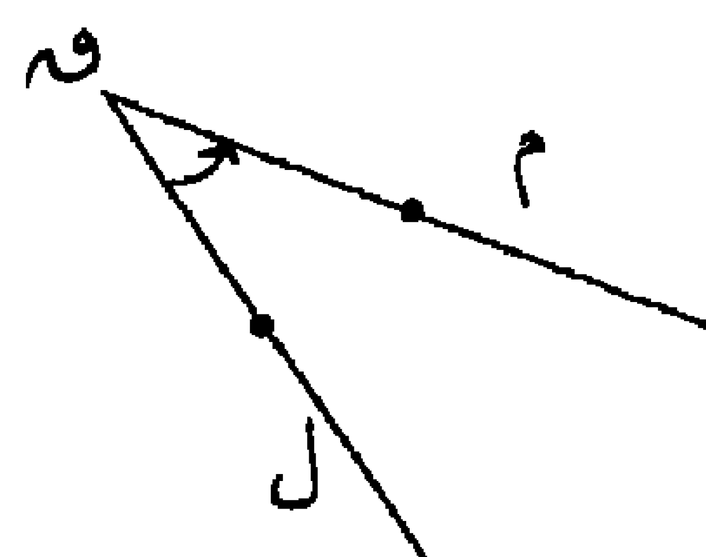












شكل (١-٩)

والآن ، نرغب فى عمل مشابه بالنسبة للزوايا الموجهه . تبعا لذلك ، فاننا سنضع التعبير التالى :

١- ∡ أ ب جـ = ∠ أ ب جـ اذا كان التوجيه للثلاثى (ب أ جـ) ضد عقارب الساعة.

٢- ∡ أ ب جـ = - ∠ أ ب جـ) اذا كان التوجيه للثلاثى (ب أ جـ) مع عقارب الساعة.

حيث ∡ أ ب جـ تعنى مقياس الزاويه الموجهه ∡ أ ب جـ

لاحظ أن :

اذا كانت ∠ أ ب جـ أى زاوية ، فان ∠ أ ب جـ = ∠ جـ ب أ

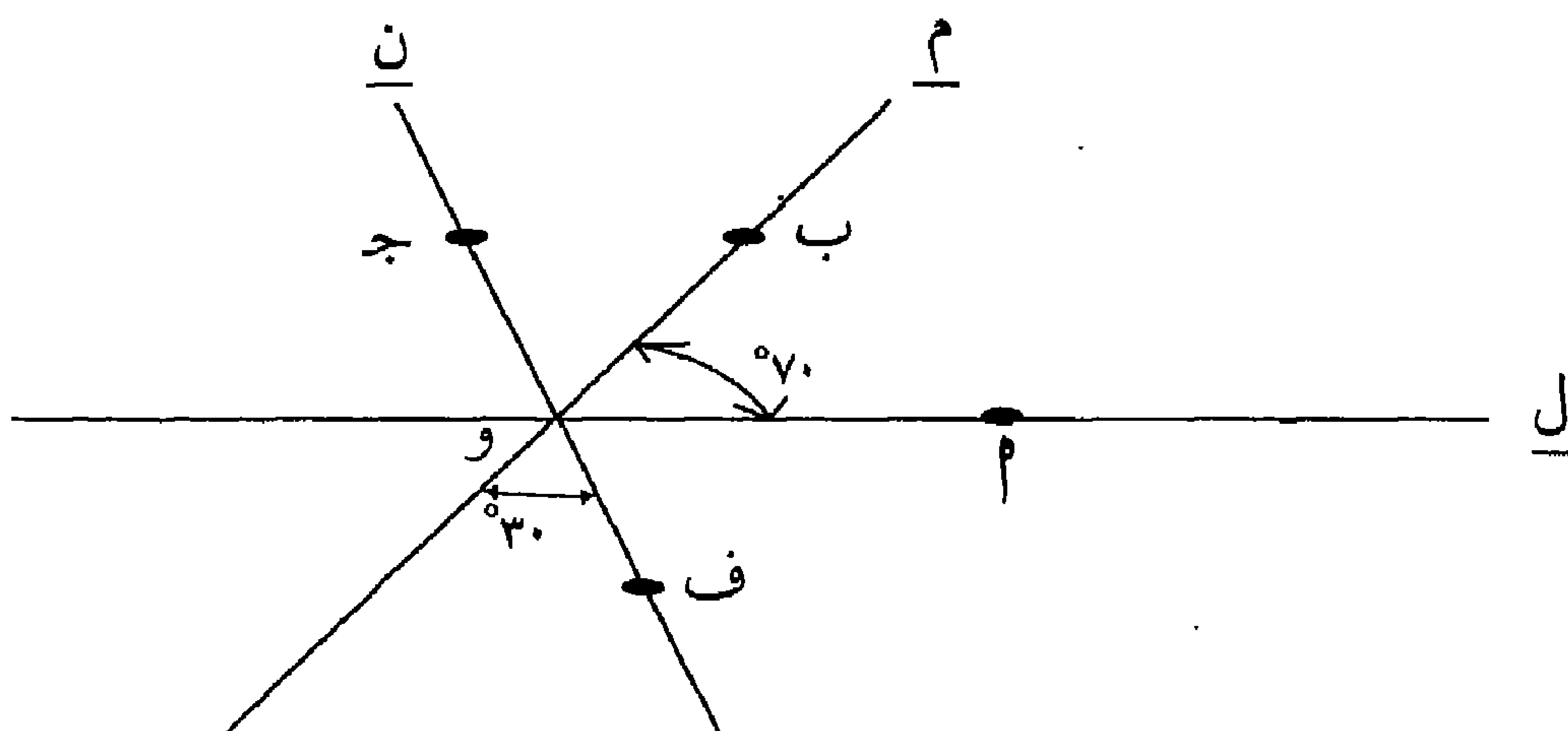
وبالتالى

∠ أ ب جـ = ∠ جـ ب أ

لكن بالنسبة للزاويا الموجهه ، فيكون

∡ أ ب جـ = - (∡ جـ ب أ)

اذا تكلمنا عن مقياس الزاوية بين خطين أو ببساطه عن الزاوية بين خطين ، فاننا نشير للزاوية الحاده بين الخطوط . ففى شكل (١-١٠) يكون مقياس الزاوية بين ل ، م هو ٧٠ ، بينما مقياس الزاوية بين ل ، ن يكون ٨٠ .

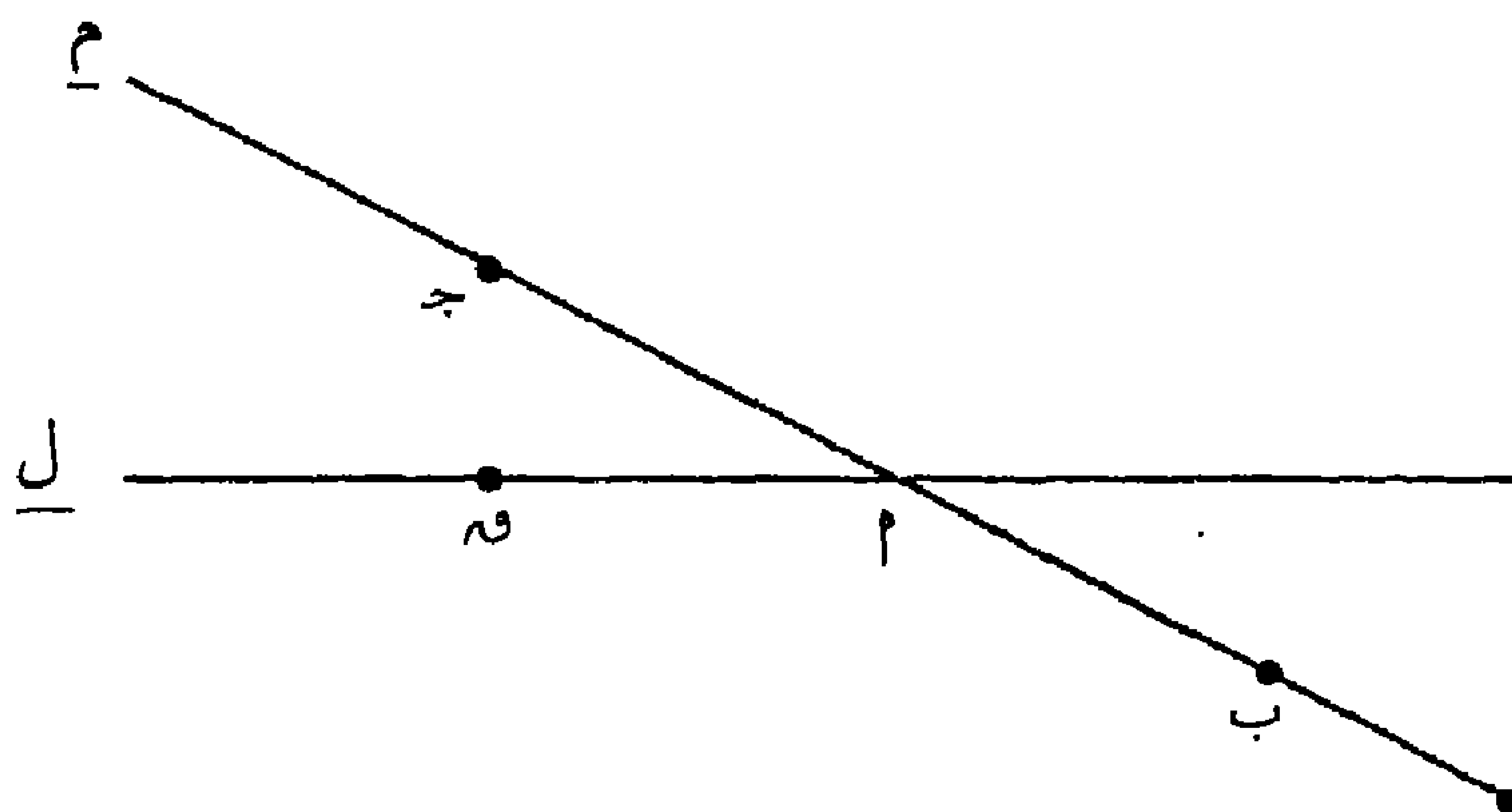


شكل (١-١٠)

والآن ، لنفرض أن ل يقطع م عند أ ؛ ق ∈ ل ؛ ب ، حـ ∈ م بحيث أن أ بين ب ، حـ .

فإذا كانت ق أ ب حادة ، فإننا نقول أن الزاوية من ل إلى م هى الزاوية الموجهة ق أ ب .

خلافاً لذلك فالزاوية من ل إلى م هى ق أ جـ .



شكل (١ - ١١)

فى شكل (١-١١) ، اذا كانت ق أ ب = ١٥٠ فان مقياس الزاوية من ل الى م يكون ق أ جـ = - ٣٠ ، ومقياس الزاوية من م الى ل هو ٣٠ .

وفى شكل (١-١٠) ، فاننا نلاحظ أن مقياس الزاوية من

١- ل الى م = أ و ب = ٧٠

٢- ل الى ن = أ و ف = -٨٠

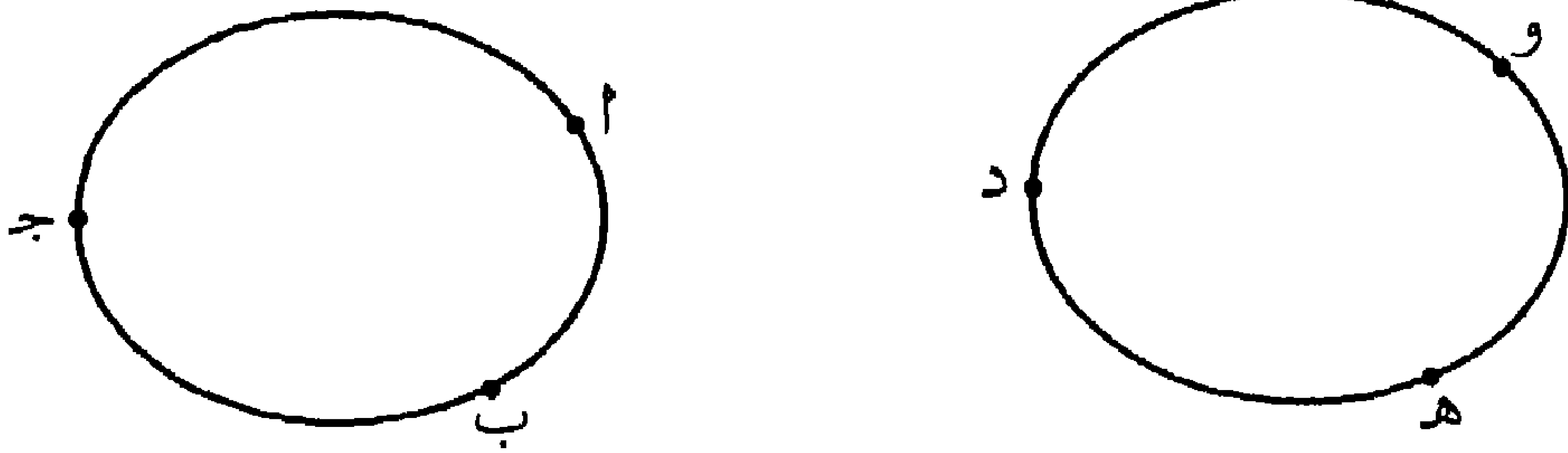
٣- ن الى م = جـ و ب = -٣٠

من هذا نستنتج أن مقياس الزاوية من خط الى آخر يأخذ القيمة من-٩٠ الى +٩٠،بينما من المستحب أن نقول أن : الزاوية بين خطين يجب أن يكون مقياسها بين ٠ ، ٩٠ .

١-١٠ : التحويلة المباشرة والمضاده

فيما يلى سنقدم فكره التوجيه لثلاثى مرتب من نقط غير واقعه على استقامه واحده .

اذا كان (أ ، ب ، جـ) ثلاثى مرتب من نقط غير واقعه على استقامه واحده ، فانه يوجد تماماً دائرة واحده ﻫ ماره بالنقط أ ، ب ، جـ .



شكل (١-١٢)

لنبدأ عند النقطه أ ، ونتحرك على الدائره لنقابل النقطه ب ثم جـ . عندئذ نقول أن الثلاثى (أ ، ب،جـ) له توجيه مع عقارب الساعه . أما اذا تحركنا فى اتجاه مضاد لعقارب الساعة ، فاننا نقول أن الثلاثى (أ ، ب ، جـ) له توجيه ضد عقارب الساعه .

فى شكل (١-١٢) ، الثلاثى (أ ، ب ، جـ) له توجيه مع عقارب الساعه ، بينما الثلاثى (د ، هـ ، و) له توجيه ضد عقارب الساعه .

يقال لتحويله بأنها **حافظة التوجيه** اذا لم يتغير التوجيه لصورة ثلاثى مرتب (أ ،ب،جـ) من نقط غير واقعه على استقامة واحده . خلافاً لذلك ، يقال للتحويلة بأنها **تعكس التوجيه** .

التحويله تسمى **تحويله مباشرة** اذا حافظت على التوجيه ، وتسمى **تحويله مضاده** إذا عكست التوجيه

١-١١ : التساوى القياسى

التحويله المستويه ت تسمى **تساوى قياسي** اذا واذا فقط

$\overline{\text{ق}'\text{ك}'} = \overline{\text{ق ك}}$ $\forall$ ق ، ك $\in$ ح^2

حيث

ق' = ت (ق) ، ك' = ت (ك) .

مثال (٢٨) : الراسم ت : $\text{ح}^2 \longrightarrow \text{ح}^2$ المعرف بالقاعده

ت (س ، ص) = (س، − ص) $\forall$ (س،ص) $\in \text{ح}^2$

هو تساوى قياس .

من الواضح أن هذا الراسم هو تحويله مستويه (أحادى وفوقى) .

لتكن أ (أ_1،أ_2) ، ب (ب_1،ب_2) نقط فى المستوى ح^2

اذن صور هذه النقط على التوالى تحت تأثير الراسم ت هى :

أَ (أ_1 ، $-\text{أ}_2$) ، بَ (ب_1 ، $-\text{ب}_2$)

من قانون البعد بين نقطتين يتضح أن :

$$\overline{\text{أ}'\text{ب}'} = \sqrt{(\text{أ}_1 - \text{ب}_1)^2 + (-\text{أ}_2 - (-\text{ب}_2))^2}$$

$$= \sqrt{(\text{أ}_1 - \text{ب}_1)^2 + (\text{ب}_2 - \text{أ}_2)^2}$$

$$= \sqrt{(\text{أ}_1 - \text{ب}_1)^2 + (\text{أ}_2 - \text{ب}_2)^2}$$

$$= \overline{\text{أ ب}}$$

وبالتالى فان الراسم ت هو تساوى قياسى .

تمارين عامه

١-إذا كانت س = [-٤، ٢) ، ص = (-١، ٦) ، ع = (-∞ ، ١]

فأوجد :

(أ) س ∪ ص　　　(ب) س ∩ ص

(ج) س - ص　　　(ء) ص - س

(هـ) س - ع　　　(و) ع - س

(ز) س ∪ ع　　　(ط) س ∩ ع

٢-وضح بالرسم المجموعات التالية ثم اكتب النتيجه فى صوره فترة عددية

(أ) {س: س ≤ -١} ∩ {س : -٤ > س > ١}

(ب) {س : س > ٣} ∩ {س : س ≤ ٠}

(ج) {س : -٣ > س ≥ ١} ∩ {س : س > ٢}

(ء) {س : -٢ > س ≥ ٤} ∪ {س : س > ١}

(هـ) {س : -٥ ≥ س ≥ ٠} ∩ {س : -٢ > س > ٣}

(و) {س : س ≥ ٧} ∩ {س : س ≤ ٥}

(ز) {س : س ≥ ٦} ∪ {س : س > ٤}

٣- اذا كانت ع هى علاقة على المجموعة ط x ط وكانت ع معرفة على النحو التالى :

(س$_١$ ، ص$_١$) ع (س$_٢$ ، ص$_٢$) ⇔ س$_١$+ص$_٢$=ص$_١$+س$_٢$

أثبت أن : ع علاقة تكافؤ . أوجد فصل التكافؤ [(٢،٥)] .

٤-اذا كانت ع هى علاقة تكافؤ على المستوى الاقليدى ح٢ معرفه كالتالى :

(س ، ص) ع (ع ، ل) ⟺ س = ع

فاثبت أن : ع علاقه تكافؤ على ح٢ ثم ارسم بعض فصول التكافؤ لها .

٥-اذا كانت س مجموعة المستقيمات فى المستوى ، وكانت ع هى علاقة التوازى // المعرفه علـــى س بحيث أن

س ع ص ⟺ س // ص أو س = ص

هل ع علاقه تكافؤ ؟ علل اجابتك .

٦- أثبت أن الراسم ر : (٠،١] ← ح المعرف بالقاعده

ر (س) = س^{٢} − ١ أحادى

٧-اذا كانت س = ح − {٣} ، ص = ح − {١} وكان الراسم

ر : س ← ص معرفاً بالقاعده

$$ر (س) = \frac{س - ٢}{س - ٣}$$

فأوجد معكوس الراسم ر.

٨- اذا كانت س = { ٠، ±١، ±٢ } وكان الراسم ر : س ← ح معرفاً بالقاعده

ر (س) = س^{٢} + ١

فأوجد مدى هذا الراسم ر.

٩- اذا كان الراسم ر : ح ← ح معرفاً بالقاعده

ر (س) = ٨س^{٣} − ١

فاثبت أن ر تناظر أحادى . كذلك أوجد معكوس هذا الراسم .

١٠- حدد نوع الرواسم التالية حيث (س،ص) ∋ ح x ح :

(أ) ر (س،ص) ← (س،- ص)

(ب) ر (س،ص) ← (- س، - ص)

(ج) ر (س،ص) ← (- ص، س)

(ء) ر ((س،ص) ← (س،٤-ص)

(هـ) ر (س،ص) ← (٢س+١، ص+٤)

(و) ر (س،ص) ← (- ص، - س)

١١- حدد نوع الرواسم التاليه :

(أ) ر:ح ← ح حيث ر(س) = $\frac{س+١}{س}$

(ب) ر:ح ← ح حيث ر (س) = $\sqrt{س^٢+١}$

(ج) ر:ح ← ح حيث ر (س) = $\frac{\sqrt{س}}{س-١}$

(ء) ر:[-١،٠) ← ح حيث ر (س) = $س^٢ - ١$

(هـ) ر : [-١،١] ← ح حيث ر (س) = $س^٢ - ١$

١٢-اذا كان ر:$ح^٢$ ← $ح^٢$ راسماً معرفاً بالقاعده

ر (س،ص) = (س+٤ ،ص+٨)

فأوجد $ر^{-١}$.

١٣- برهن على أن مجموعة جميع الرواسم فى المستوى التى على الصورة :

ر (س،ص) = (س + أ ، ص + ب) ؛ أ،ب ∋ ح

تؤلف زمره .

١٤- أوجد صوره الدائره

د = { (س،ص) : س^{٢} + ص^{٢} = ٤ }

بالتحويله التي مصفوفتها هي $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

١٥- ارسم على ورق مربعات بقياس رسم مناسب الشكل الرباعي الذي رؤوسه هي :

(٠،٠) ، (٢،١) ، (٢،٣) ، (٠،٢) ولون هذا الشكل .

أوجد ولون صورة الشكل الرباعي تحت تأثير كل من مصفوفات التحويلات الآتيه:

أ- $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ ب- $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ج- $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ د- $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ م- $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

اذكر تأثير كل تحويله على الشكل الرباعي .

١٦- أوجد صوره كل من :

ل = { (س،ص) : ص = س + ١ }

م = { (س،ص) : ص = − س + ١ }

تحت تأثير كل من مصفوفات التحويل الآتية :

١٧- أوجد صوره القطع الناقص

أ- $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ب- $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ج- $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

د = { (س،ص) : $\frac{(\text{س}-١)^{٢}}{٨١} + \frac{(\text{ص}-٣)^{٢}}{٤٩} = ١$ }

بالتحويله التي مصفوفتها هي $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix}$

١٨- أوجد صوره القطع الزائد

$$د = \left\{ (س،ص) : \frac{(س+٣)^{٢}}{٤} - \frac{(ص-١)^{٢}}{٩} = ١ \right\}$$

بالتحويله التى مصفوفتها هى : $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & \frac{٢}{٣} \end{pmatrix}$

١٩- برهن أن النظام (ع، ٥) يؤلف زمره . هل الزمره إبداليه؟

حيث ع { ر$_{١}$، ر$_{٢}$، ر$_{٣}$، ر$_{٤}$، ر$_{٥}$، ر$_{٦}$، ر$_{٧}$، ر$_{٨}$} ؛ ∀ ق (س،ص) يكون

ر$_{١}$(ق) = (س، ص) ، ر$_{٢}$(ق) = (س،−ص) ، ر$_{٣}$(ق) = (−س، ص)

ر$_{٤}$(ق) =(−س،−ص) ، ر$_{٥}$(ق) = (ص،س) ، ر$_{٦}$(ق) = (ص،−س)

ر$_{٧}$(ق) = (−ص،س) ، ر$_{٨}$(ق) = (−ص،−س) .

الباب الثانى

الانعكاس

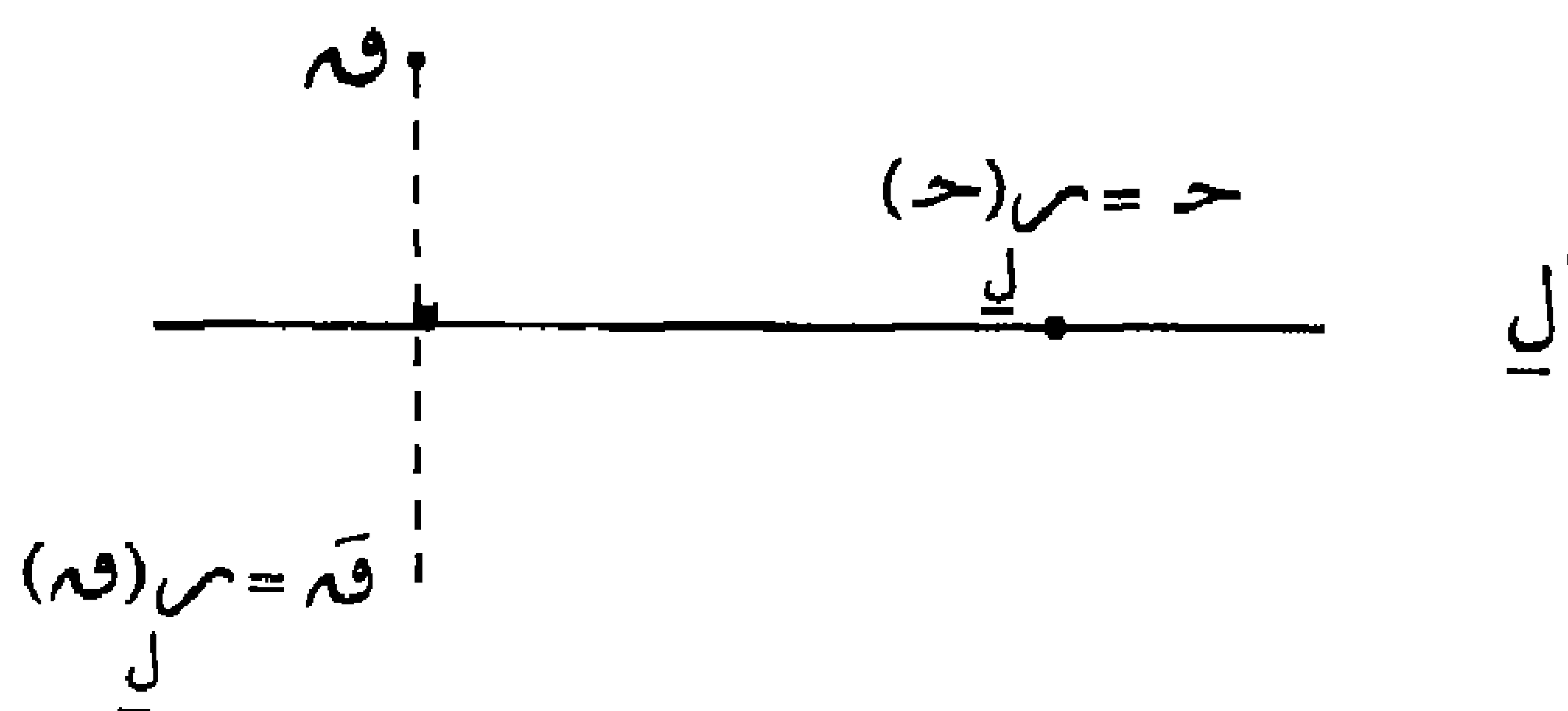
٢-١: صوره النقطة بالانعكاس

تعريف: يقال للنقطة ق/ ∈ ح^٢ بأنها صورة للنقطة ق ∈ح^٢ بانعكاس بالنسبة الى الخط ل ⊂ح^٢ تحت تأثير الراسم ر_ل :ح^٢← ح^٢ اذا كان

١- القطعة المستقيمه ق ق/ عمودية على الخط ل .

٢- الخط ل ينصف القطعة المستقيمة ق ق/ .

الخط ل يسمى محور الانعكاس والراسم ر_ل يسمى راسم الانعكاس . لاحظ أنه ، إذا كانت حـ ∈ ل ، فان ر_ل (حـ) = حـ . شكل (٢-١) .



شكل(٢-١)

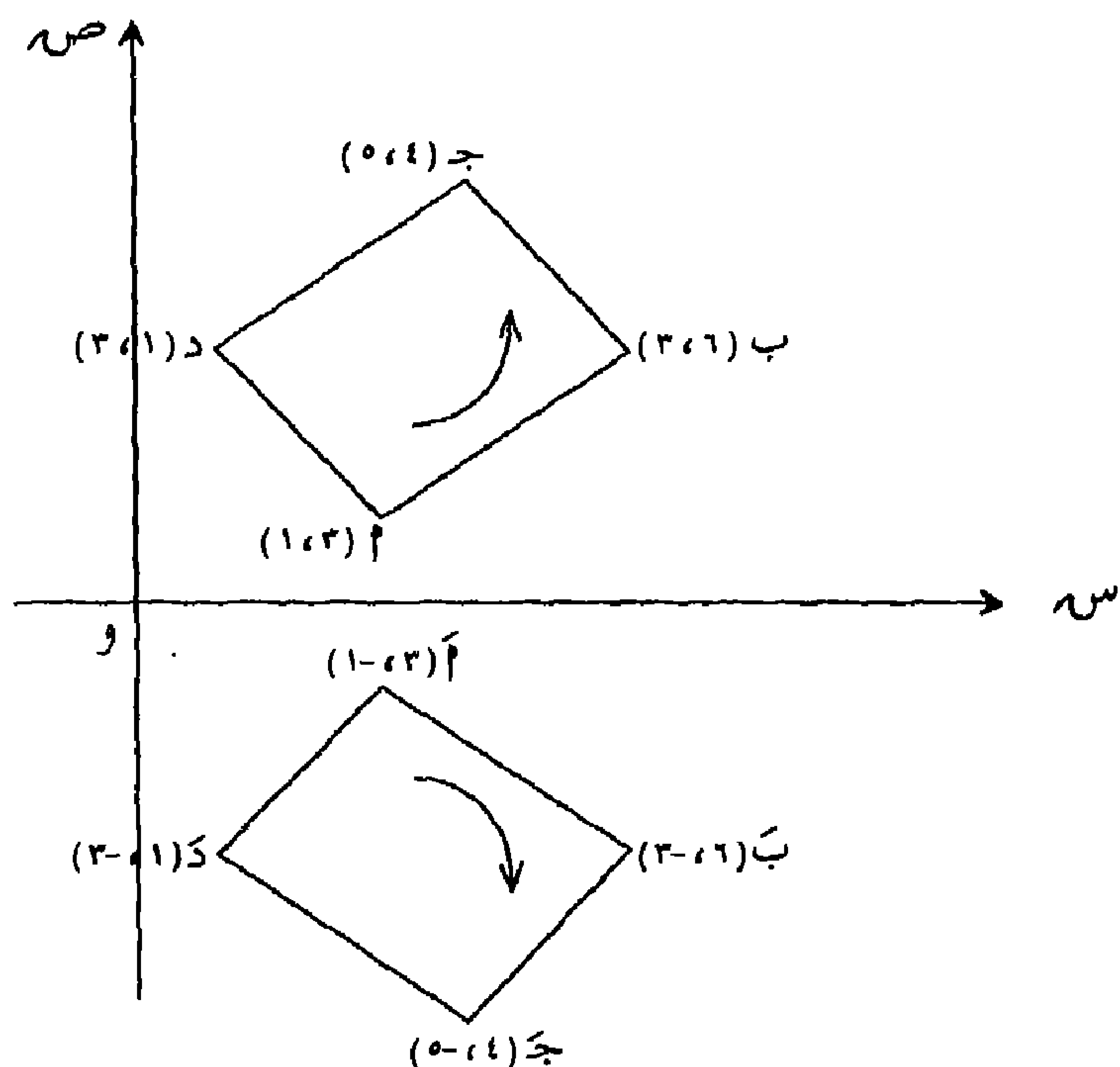
مثال (١) : أوجد صورة المجموعة

ع = { (٣،١) ، (٣،٦) ، (٤،٥) ، (١،٣) }

بالانعكاس بالنسبة لمحور السينات .

الحل :

بتطبيق تعريف الانعكاس على المجموعةع (انظر الشكل (٢-٢)) نحصل على:



شكل (٢ - ٢)

ع = {(٣،-١) ، (٦،-٣) ، (٤،-٥) ، (١،-٣)}

وبلغة آخرى ، يمكننا كتابة :

$ر_{س}$ (٣،١) = (٣،-١)

$ر_{س}$ (٦،٣) = (٦،-٣)

$ر_{س}$ (٤،٥) = (٤،-٥)

$ر_{س}$ (١،٣) = (١،-٣)

ملاحظة (١) : لو نظرنا الى المثال السابق ، فاننا نستطيع القول بأن : راسم الانعكاس بالنسبه لمحور السنيات $ر_{س}$: $ح^{٢} \leftarrow ح^{٢}$

يمكن تعريف قاعدته كالتالى :

$ر_{س}$ (س،ص) = (س،-ص) ∀ (س،ص) ∈ $ح^{٢}$

ولقد أثبتنا فى مثال (٢٨) بالباب الأول ،أن هذا الراسم هو تحويله هندسية (مستويه) ،كما أنه تساوى قياسى . وهذا يظهر تماماً من الشكل (٢-٢) حيث نرى أن :

$\overline{أ ب'} = \overline{أ ب}$ ، $\overline{ب' جـ'} = \overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ' د'} = \overline{جـ د}$ ، $\overline{د أ'} = \overline{د أ}$.

مثال (٢) : اذا كانت أ(١،٣) ،ب(−٢،−١) نقط معطاه ، فأوجد معادله الخط ل بحيث أن ر_ل (أ) = ب

الحل :

لايجاد معادله الخط ل (محور الانعكاس) نتبع مايأتى :

منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ هو النقطه $\left(-\frac{١}{٢} ، ١ \right)$

ميل الخط $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{-١ - ٣}{-٢ - ١} = \frac{٤}{٣}$

أذن ، ميل الخط ل = $-\frac{٣}{٤}$

بالتالى ، فان معادله الخط ل : ص − ١ = $-\frac{٣}{٤}\left(س + \frac{١}{٢} \right)$

أى

٦س + ٨ص − ٥ = ٠

وبلغه آخرى نكتب :

ل = {(س،ص) : ٦س + ٨ص − ٥ = ٠}

مثال(٣) : لتكن ق (س،ص) ∈ ح^٢ ، ر_ل (ق) = ق' .

أوجد ق (س' ، ص') إذا كان :

١− ل = { (س،ص) : ص = ب}

٢- ل = { (س،ص) : س = أ }

٣- ل = { (س،ص) : ص= س}

٤- ل = { (س،ص) : ص = - س}

حيث أ ، ب ∋ح .

الحل :

١ - لنفرض أن ق/ (س/ ، ص/) ∋ ح^٢ ، ك هى منتصف القطعة المستقيمة ق ق/ .

إحداثيات ك هى ((س + س/)/٢ ، (ص + ص/)/٢)

من تعريف الانعكاس نجد أن :

س = س/

اذن احداثيات ك هى

(س ، (ص + ص/)/٢)

بما أن ك ∋ل ، فان

ب = (ص + ص/)/٢

أى :

ص/ = ٢ب - ص

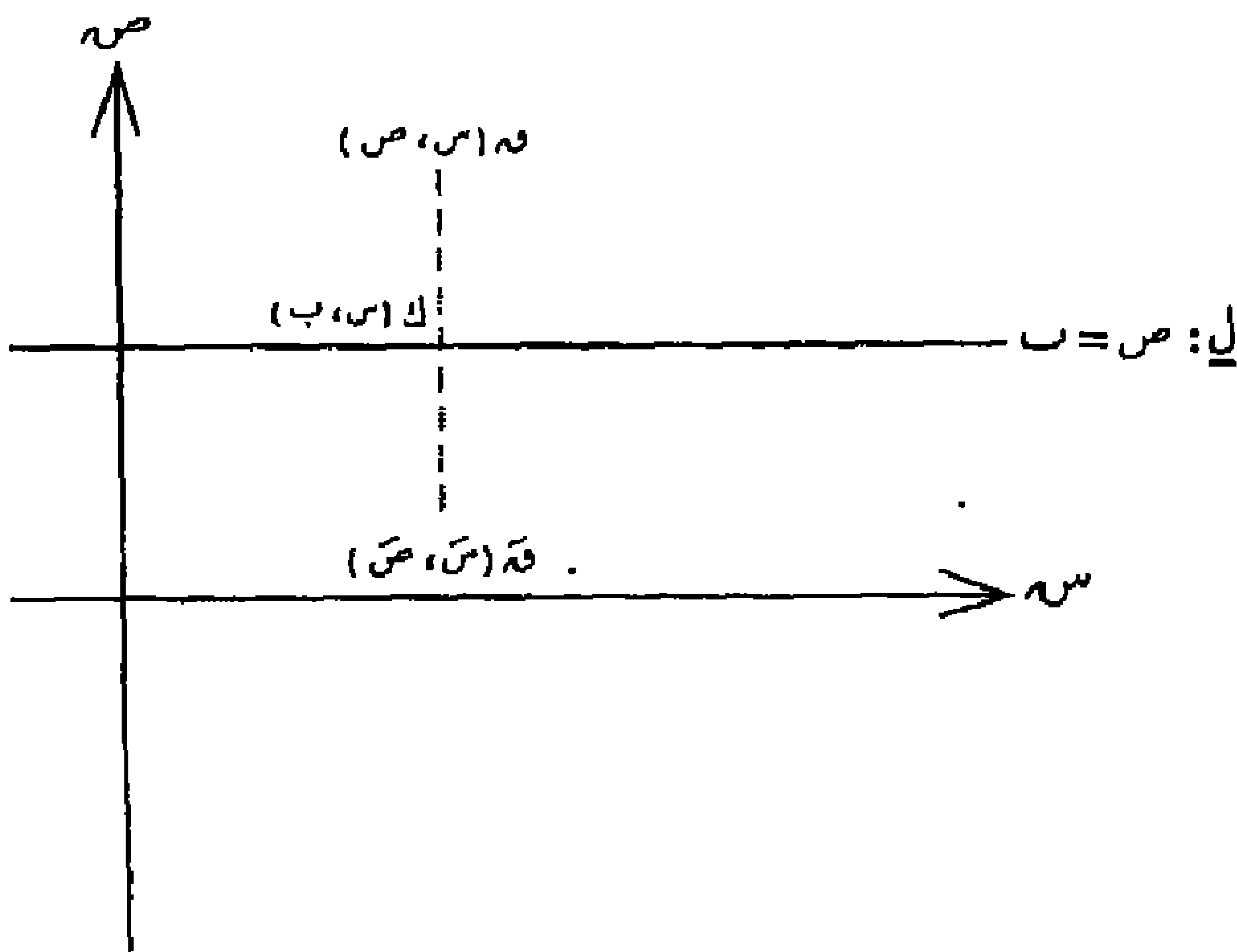
بالتالى فأن ق/ (س، ٢ب - ص)

وبعباره آخرى ، نكتب

مل (س،ص) = (س، ٢ب - ص)

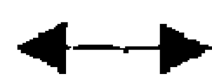
٢-بنفس الطريقة الوارده فى (١) ، نجد أن :

مل (س،ص) = (٢أ - س، ص)



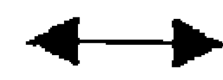
شكل (٢-٣)

٣ -لنفرض أن ق (س،ص) ∈ ح^{٢}، ك منتصف القطعة المستقيمة ق ق/.



ليكن م$_{١}$ هو ميل الخط ل ، م$_{٢}$ هو ميل الخط ق ق/ . بالتالى فان :

$$م_{١} = ١ \quad ، \quad م_{٢} = \frac{ص^{/} - ص}{س^{/} - س}$$



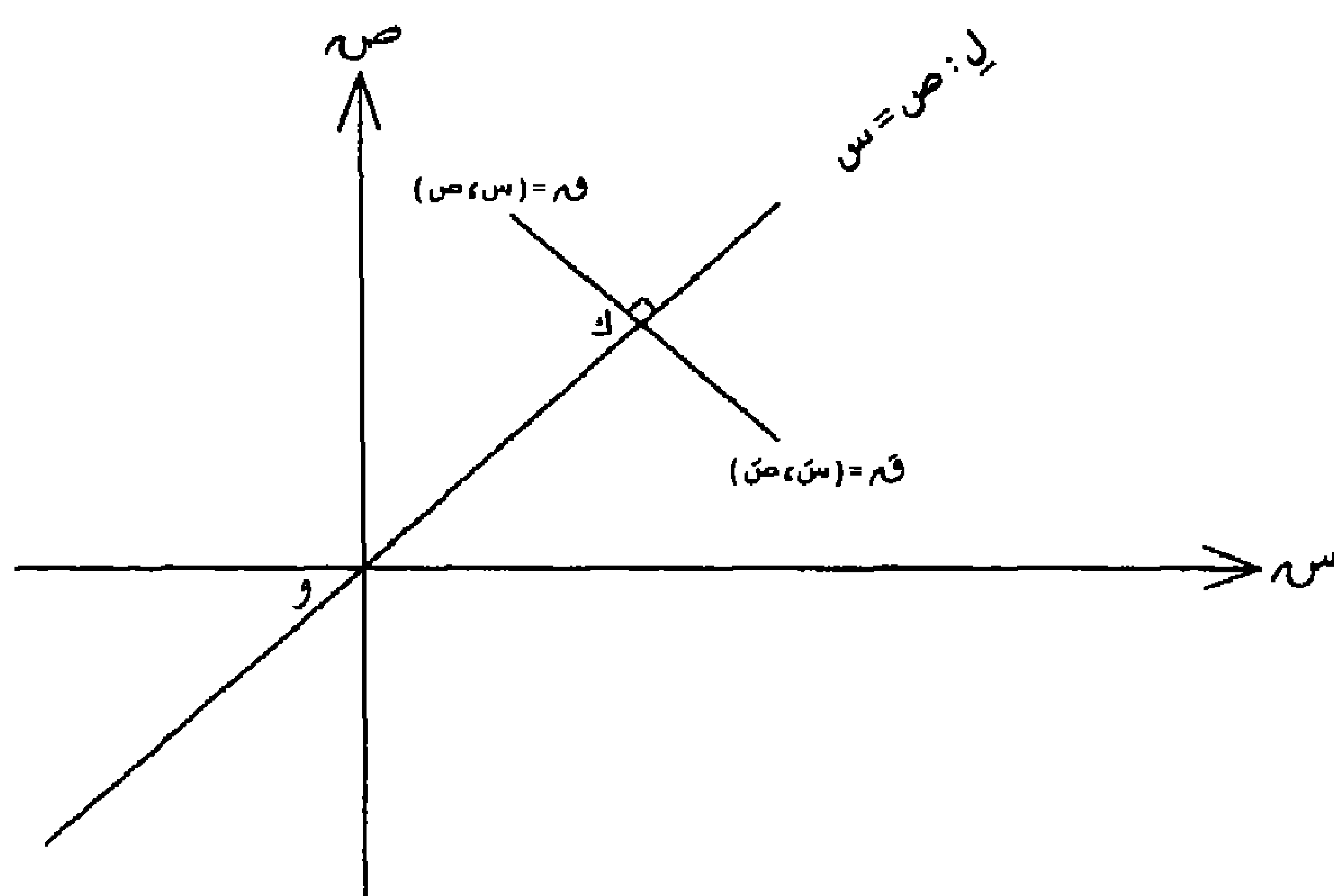
لكن ق ق/ ⊥ ل .

اذن :

$$م_{١} \times م_{٢} = \left(\frac{ص^{/} - ص}{س^{/} - س} \right) \times ١ = -١$$

أى أن :

$$ص^{/} - ص = س - س^{/} \qquad (i)$$



شكل (٢ – ٤)

ك هى منتصف $\overline{ق ق'}$.

اذن إحداثيات ك هى $\left(\frac{س + س'}{٢} ، \frac{ص + ص'}{٢} \right)$

لكن ك ∈ لِ . اذن فهى تحقق المعادله ص = س . أى

$$\frac{س + س'}{٢} = \frac{ص + ص'}{٢}$$

أى

$$ص' + ص = س' + س \qquad (ii)$$

من (i) ، (ii) ينتج أن

$$ص' = س \ ، \ س' = ص$$

وبالتالى فان ق' (ص ، س) .

وبعبارة آخرى ، نكتب

$$ر_{لِ} (س، ص) = (ص ، س)$$

٤- بنفس الطريقة المتبعه فى (٣) ، نجد أن

$$ر_{لِ} (س، ص) = (- ص ، - س)$$

حيث لِ هو محور الأنعكاس الذى معادلتة ص = - س .

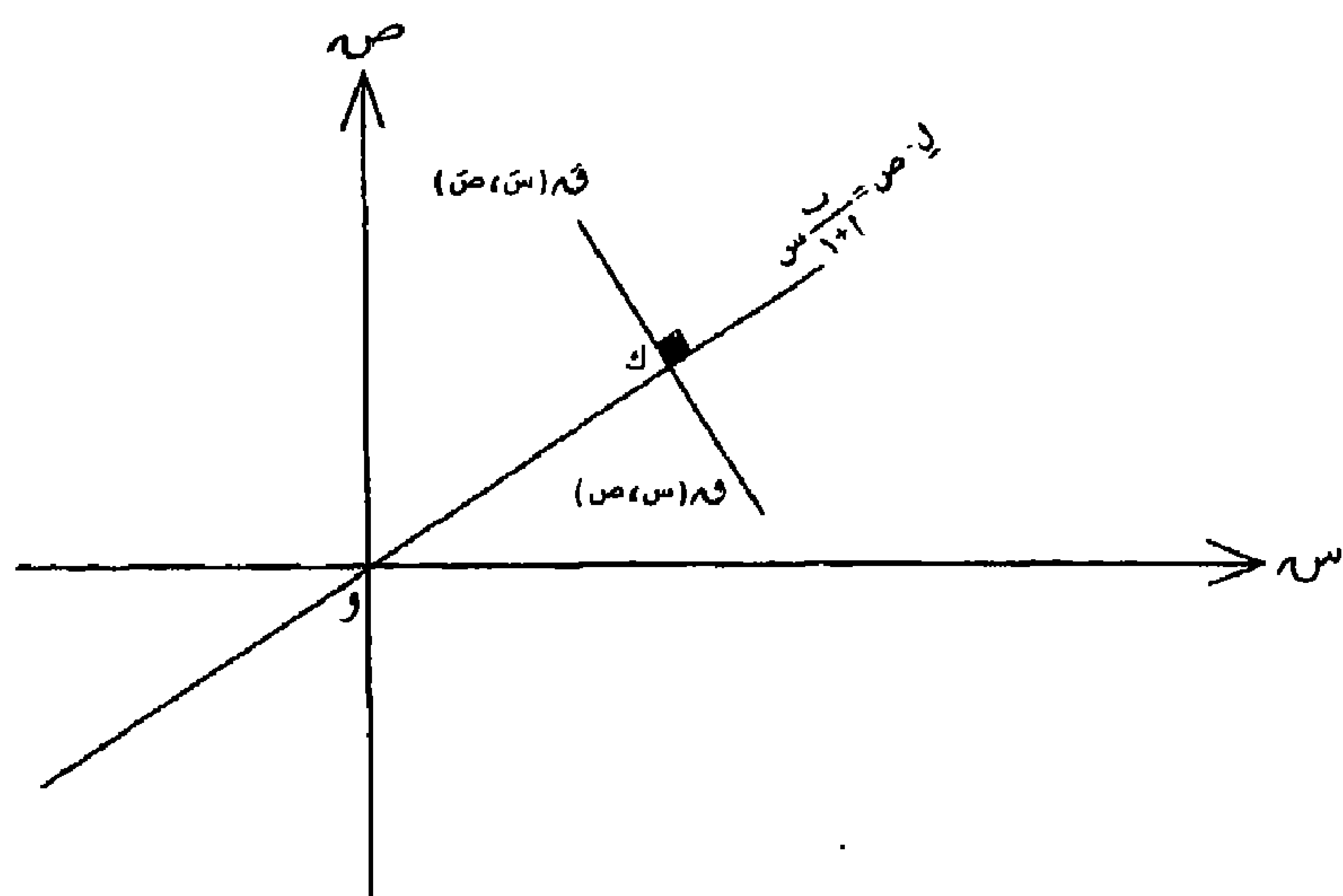
★ مثال (٤) : اذا كان

$$لِ = \{ (س،ص) : ص = \frac{ب}{أ+١} س \ ، \ أ \neq -١ \ ، \ أ^{٢} + ب^{٢} = ١ \}$$

فاثبت أن :

$$ر_{لِ} (س ، ص) = (أ س + ب ص ، ب س - أ ص)$$

الحل :



شكل (٢ – ٥)

ميل الخط ل = م١ = $\frac{\text{ب}}{\text{أ} + 1}$ س .

ميل الخط $\overleftrightarrow{\text{ق ق}'}$ = م٢ = $\frac{\text{ص}' - \text{ص}}{\text{س}' - \text{س}}$

$= \frac{(\text{ب س} - \text{أ ص}) - \text{ص}}{(\text{أ س} + \text{ب ص}) - \text{س}}$

$= \frac{\text{ب س} - (\text{أ} + 1)\,\text{ص}}{(\text{أ} - 1)\,\text{س} + \text{ب ص}}$

أذن:

م١ . م٢ = $\left(\frac{\text{ب}}{\text{أ} + 1}\right)$ م٢ = $\frac{\text{ب}^2\,\text{س} - (\text{أ} + 1)\,\text{ب ص}}{(\text{أ}^2 - 1)\,\text{س} + (\text{أ} + 1)\,\text{ب ص}}$

أى أن

$$\text{م}_1\,\text{م}_2 = \frac{\text{ب}^2\,\text{س} - (1 + \text{أ})\,\text{ب ص}}{-\text{ب}^2\,\text{س} + (1 + \text{أ})\,\text{ب ص}}$$

(لأن $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = 1$)

بضرب الطرفين فى (− ١) :

$$(-1)\,\text{م}_1\,\text{م}_2 = \frac{-\text{ب}^2\,\text{س} + (1 + \text{أ})\,\text{ب ص}}{-\text{ب}^2\,\text{س} + (1 + \text{أ})\,\text{ب ص}}$$

بالتالى فأن :

$$\text{م}_1\,\text{م}_2 = -1$$

وهذا يعنى أن :

$$\overline{\text{ق ق}'} \perp \underline{\text{ل}} \,.$$

ولتحقيق شرط الانعكاس الثانى ، نفرض أن ك (س*، ص*) هى منتصف $\overline{\text{ق ق}'}$.

$$\text{س}^* = \frac{\text{س} + \text{س}'}{2} = \frac{\text{س} + \text{أ س} + \text{ب ص}}{2} \qquad (i)$$

$$\text{ص}^* = \frac{\text{ص} + \text{ص}'}{2} = \frac{\text{ص} + \text{ب س} - \text{أ ص}}{2} \qquad (ii)$$

بضرب (i) فى $\frac{\text{ب}}{\text{أ} + 1}$ ينتج أن :

$$\frac{\text{ب}}{\text{أ} + 1}\,\text{س}^* = \frac{\text{ب س} + \text{أ ب س} + \text{ب}^2\,\text{ص}}{2(\text{أ} + 1)}$$

$$= \frac{\text{ب س} + \text{أ ب س} + (1 - \text{أ}^2)\,\text{ص}}{2(\text{أ} + 1)}$$

$$= \frac{\text{ب س}\,(1 + \text{أ}) - (\text{أ}^2 - 1)\,\text{ص}}{2(1 + \text{أ})}$$

$$= \frac{\text{ب س} \; (\text{أ} + 1) - (\text{أ} + 1)(\text{أ} - 1) \; \text{ص}}{2 \, (\text{أ} + 1)}$$

$$= \text{ص}'$$

أى أن ك ∈ ل . أى أن الخط ل ينصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{ق ق}'}$.

مثال (٥) : أوجد قاعدة الانعكاس للخط

$\text{ل} = \{(\text{س}،\text{ص}) : \text{ص} = \frac{1}{\sqrt{3}} \, \text{س}\}$.

الحل :

بتطبيق قاعدة الانعكاس الوارده فى مثال (٤) ، نجد أن

$$\frac{\text{ب}}{\text{أ} + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ومنها

$$\text{ب} = \frac{1}{\sqrt{3}} \, (\text{أ} + 1) \qquad (i)$$

وحيث أن

$$\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = 1 \qquad (ii)$$

فبحل (i) ، (ii) للحصول على قيمتى أ ، ب

بالتعويض من (i) فى (ii) ، نحصل على

$$\text{أ}^2 + \frac{1}{3} \, (\text{أ} + 1) = 1$$

أى :

$$2 \, \text{أ}^2 + \text{أ} - 1 = 0$$

$$(2 \, \text{أ} - 1)(\text{أ} + 1) = 0$$

بالتالى : $\text{أ} = \frac{1}{2}$ ، $\text{أ} = -1$ (هذه القيمه تستبعد)

بالتعويض فى (i) عن $\text{أ} = \frac{1}{2}$ ينتج أن $\text{ب} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وحيث أن قاعدة الانعكاس هى :

$$ر_{\underline{ل}}(س،ص) \longrightarrow (أ\,س + ب\,ص \text{ ، } ب\,س - أ\,ص)$$

اذن :

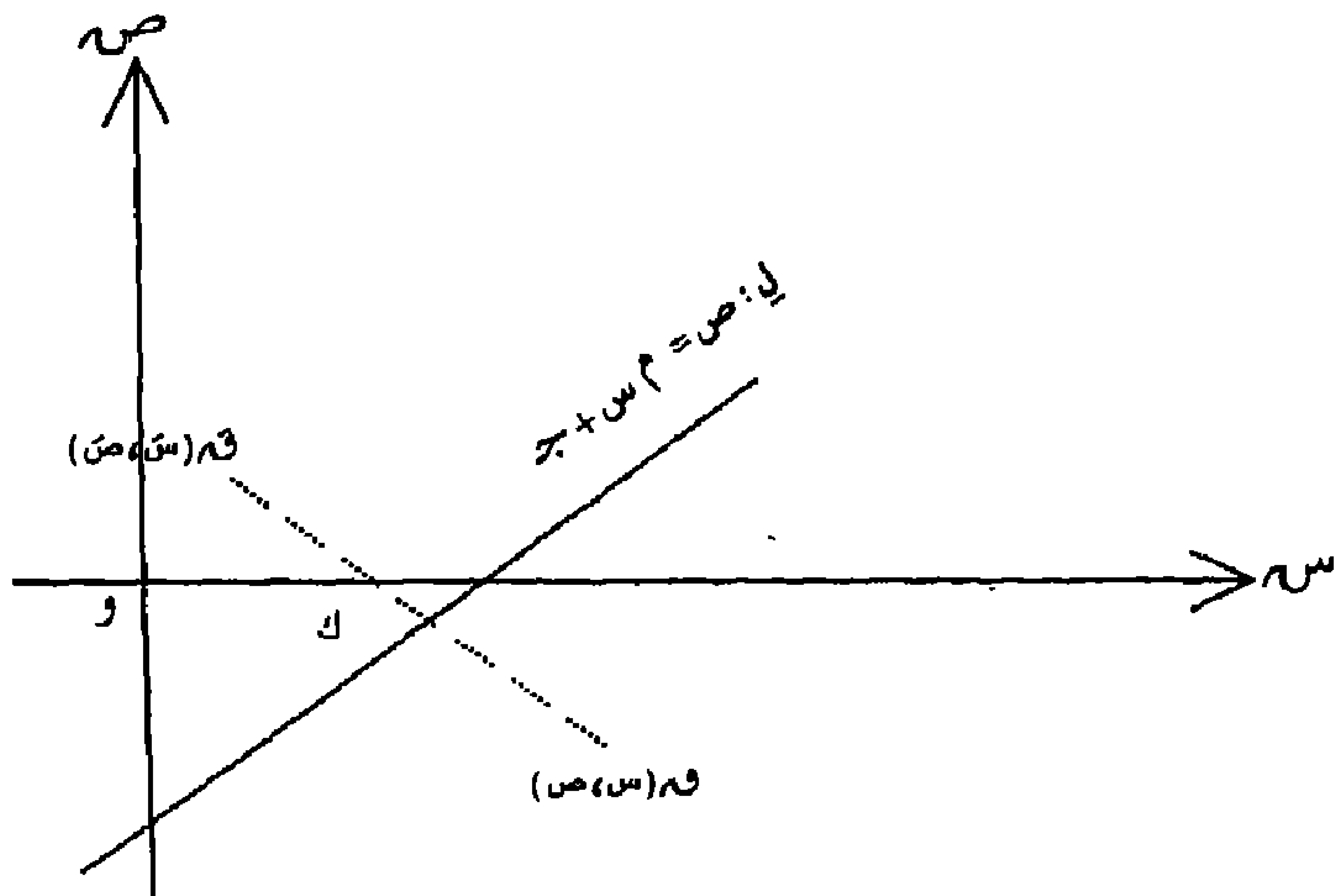
$$ر_{\underline{ل}}(س،ص) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\,س + \frac{\sqrt{3}}{2}\,ص \text{ ، } \frac{\sqrt{3}}{2}\,س - \frac{1}{2}\,ص\right)$$

وهى قاعدة الانعكاس المطلوب للخط ل : $ص = \frac{1}{\sqrt{3}}\,س$.

مثال (٦) : أوجد قاعدة الانعكاس للخط

$\underline{ل} = \{(س،ص) : ص = م\,س + جـ\}$

الحل :



شكل (٢-٦)

لنفرض أن ق′ (س′ ، ص′) ∈ ح^{2} ، ك منتصف القطعة المستقيمة ق ق′ . ليكن م هو ميل الخط ل ، م* هو ميل الخط $\overline{ق ق′}$. بالتالى فان :

$$م^{*} = \frac{ص′ - ص}{س′ - س}$$

لكن $\overline{ق ق′} \perp \underline{ل}$

اذن م . مَ = م $\left(\frac{\text{ص}' - \text{ص}}{\text{س}' - \text{س}} \right) = -1$

أى أن م (صَ − ص) = س − سَ　　　(i)

ك هى منتصف $\overline{\text{ق ق}'}$.

اذن احداثيات ك هى $\left(\frac{\text{س} + \text{س}'}{2} \text{ ، } \frac{\text{ص} + \text{ص}'}{2} \right)$

لكن ك ∋ ل . اذن فهى تحقق المعادله ص = م س + جـ . أى

$$\frac{\text{ص} + \text{ص}'}{2} = \text{م} \; \frac{\text{س} + \text{س}'}{2} + \text{جـ}$$

بالضرب فى (٢م) نحصل على

$$\text{م} (\text{ص} + \text{ص}') = \text{م}^2 (\text{س} + \text{س}') + 2\text{م جـ}$$

(ii)

بطرح (i) من (ii) نجد أن

$$2\text{م ص} = (\text{م}^2 - 1) \text{ س} + (\text{م}^2 + 1) \text{ س}' + 2\text{م جـ}$$

اذن

$$\text{س}' = \frac{1}{1 + \text{م}^2} \left[(1 - \text{م}^2) \text{ س} + 2\text{م} (\text{ص} - \text{جـ}) \right]$$

بالتعويض عن س/ فى (i) :

$$\text{م ص}' = \frac{1}{\text{م}^2 + 1} \{ (1 + \text{م}^2) \text{ س} - (1 - \text{م}^2) \text{ س} - 2\text{م}(\text{ص} - \text{جـ}) + \text{م}(1 + \text{م}^2) \text{ ص} \}$$

$$= \frac{1}{\text{م}^2 + 1} \{ \text{م} (1 + \text{م}^2) \text{ ص} + 2 \text{ م}^2 \text{ س} - 2 \text{ م ص} + 2 \text{ م جـ} \}$$

بالقسمه على م نحصل على

ص َ = $\frac{1}{م^2 + 1}$ { ص + م^{2} ص + ٢ م س − ٢ ص + ٢ جـ }

= $\frac{1}{م^2 + 1}$ { م^{2} ص − ص + ٢ م س + ٢ جـ }

= $\frac{1}{م^2 + 1}$ { (١ − م^{2}) ص + ٢ م س + ٢ جـ }

أى أن :

ق ،($\frac{1}{م^2 + 1}$ {(١ − م^{2}) س + ٢م(ص − جـ) } ، $\frac{1}{م^2 + 1}$ {(م^{2} − ١) ص + ٢ م س + ٢جـ})

وبالتالى تكون قاعدة الانعكاس بالنسبة للخط للمستقيم ل : ص = م س+جـ هى

سل (س،ص) = $\frac{1}{م^2 + 1}$ ((١ − م^{2}) س + ٢م (ص − جـ) ،(م^{2} − ١) ص + ٢م س + ٢جـ)

نظرية (١) : الانعكاس تساوى قياسى .

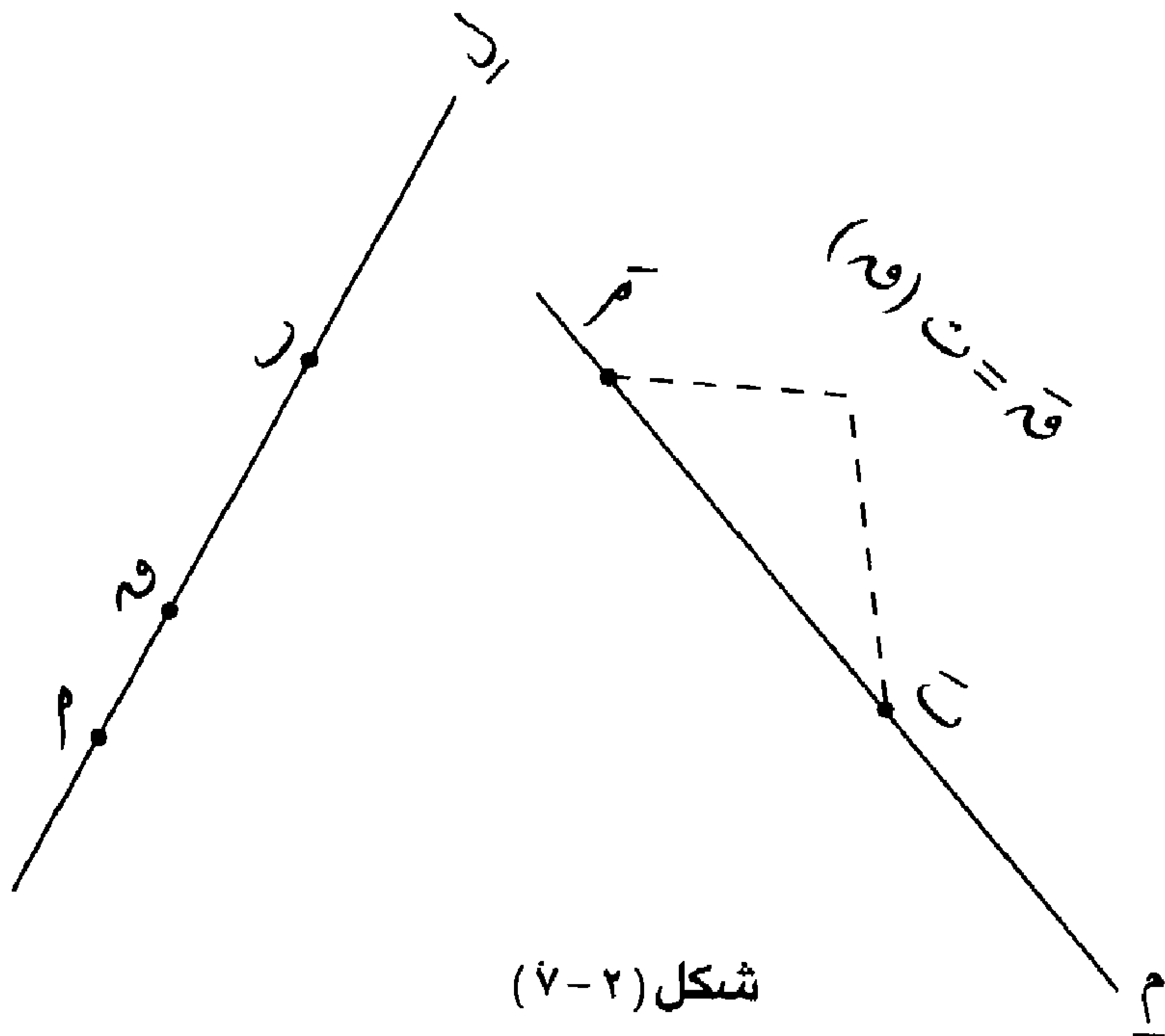
البرهان متروك كتمرين

نظرية (٢) : إذا كان ت تساوى قياسى ، ل ⊂ ح^{2} ، فان لَ = ت (ل) يكون خطاً فى المستوى ح^{2} .

البرهان : دعنا أولاً ندخل الخط م ونثبت أن لَ = م . أى انه يجب علينا اثبات أن :

لَ ⊂ م ، م ⊂ لَ

نحن نحصل على الخط م وذلك بوضع نقطتين أ،ب ∈ ل وبأخذ م كخط مار بصور كل من أ ، ب تحت تأثير ت . بالتالى فان م = $\overleftrightarrow{أ َ ب َ}$.



شكل (٢ - ٧)

حيث أن لَ هى مجموعة جميع صور النقط الواقعه على ل ، فانه يمكننا برهان أن لَ ⊃ م وذلك بأخذ أى نقطه ق ∈ ل واثبات أن ق' ∈ م (حيث ق' صوره ق تحت تأثيرت) .

إذا فرضنا أن ق بين أ،ب ؛ فان $\overline{\text{أ ق}} + \overline{\text{ق ب}} = \overline{\text{أ ب}}$.

حيث أن ت تساوى قياسى ، فان

$$\overline{\text{أ' ق'}} + \overline{\text{ق' ب'}} = \overline{\text{أ' ب'}}$$

اذا كانت ق' ∉ م ، فانه يوجد المثلث أ' ق' ب' الذى فيه :

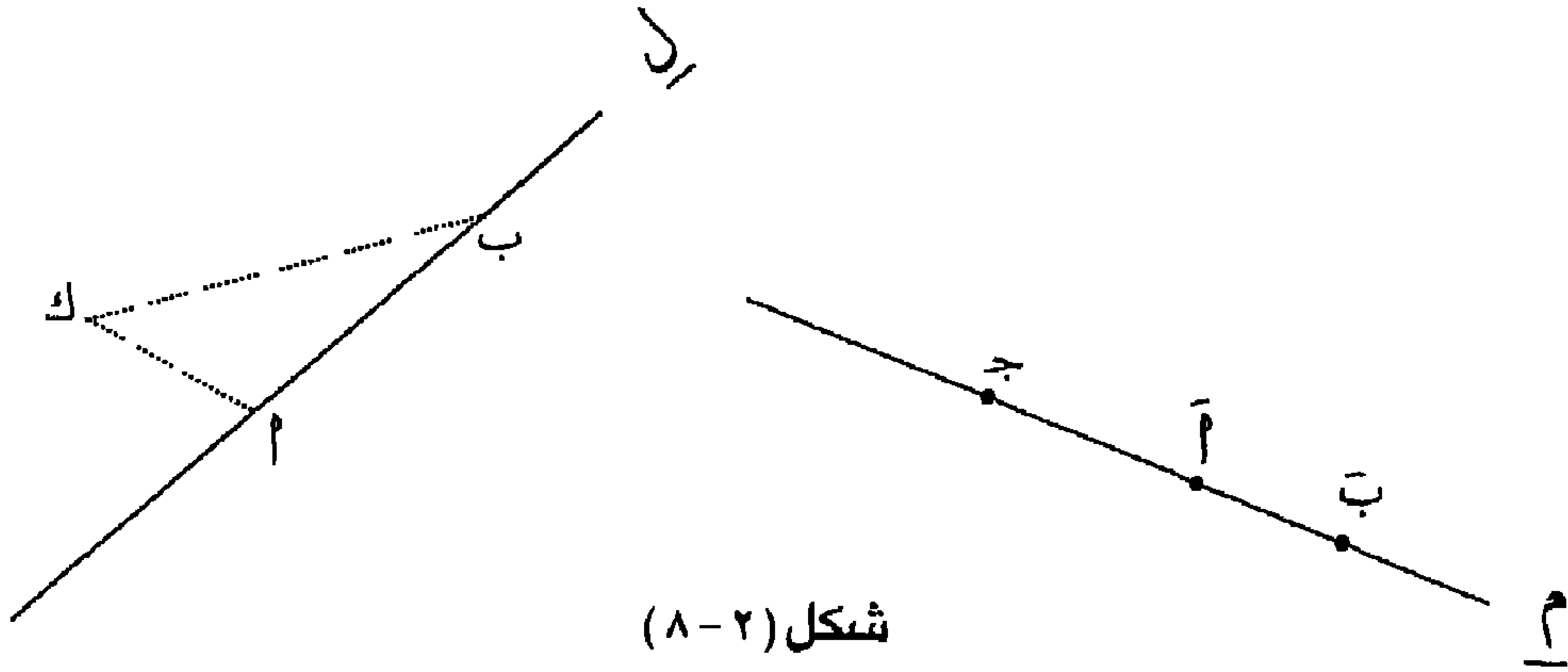
$$\overline{\text{أ' ق'}} + \overline{\text{ق' ب'}} > \overline{\text{أ' ب'}}$$

(من المتباينة المثلثية)

من هذا التعارض نستنتج أن ق' ∈ م اذا وقعت ق بين أ،ب .بالتالى فان ل' ⊃ م

الآن ، سنثبت أن : م ⊃ ل/ .

نفرض أن جـ ∈ م . المطلوب اثبات أن جـ هى صورة لنقطه على الخط ل ، أى اثبات أن جـ ∈ ل/ .



شكل (٢-٨)

بماأن ت تساوى قياسى ، ت تحويله مستويه (هندسيه) . اذن توجد نقطه ك بحيث أن ت (ك) = جـ .

اذا فرضنا أن ك ∉ ل ، فانه يوجد المثلث أ ك ب .

باستخدام حقيقة أن :

أ ك = أ/ جـ ، ك ب = جـ ب/ ، أ ب = أ/ ب/

وكذلك نستخدم المتباينة المثلثية ، فاننا نحصل مرة آخرى على تعارض ، نستنتج منه أن ك ∈ ل . وبالتالى فان جـ ∈ ل/ . ومن ثم نكون قد أثبتنا أن صورة الخط ل تحت تأثير تساوى قياسى هو خط .

نظرية (٣) : اذا كان ت تساوى قياسى ، فان

∠ أ ب جـ = ∠ أ/ ب/ جـ/

البرهان :

بما أن ت تساوى قياسى ، فان

أ ب = أ/ ب/ ، أ جـ = أ/ جـ/ ، ب جـ = ب/ جـ/

اذن : المثلثان ∆ أ ب جـ ، ∆ أ/ ب/ جـ/ متطابقان .

من هذا ينتج أن :

∠ أ ب جـ = ∠ أ/ ب/ جـ/ .

نتيجه : اذاكان ت تساوى قياسى ، فان

ل/ ⊥ م/ ⟺ ل ⊥ م ∀ ل ⊂ ح٢ ، م ⊂ ح٢ .

حيث

ل/ = ت(ل) ، م/ = ت (م) ، ⊥ علاقة التعامد .

نظريه (٤) : اذا كان ت تساوى قياسى ، فان

ل/ // م/ ⟺ ل // م

حيث

ل/ = ت (ل) ، م/ = ت (م) ، // علاقه التوازى .

البرهان :

أولا ، نفرض أن ل // م . إذا كان ل/ لايوازى م/ ، فانه يوجد نقطه أ

بحيث أن أ ∈ ل/ ، أ ∈ م/ . وهذا يؤدى الى وجود النقط ق ∈ ل ، ك ∈ م بحيث أن

ت (ق) = أ ، ت (ك) = أ

وحيث أن ل // م ، فان ق ≠ ك . لكن هذا يعنى أن ت لا تكون تساوى قياسى .

من هذا التعارض ، نستنتج ل/ // م/ .

برهان الحاله ل/ // م/ ⇐ ل // م يترك كتمرين .

مثال (٧) : إذا كان ل = { (س،ص) : ص = − س } ،

م = { (س،ص) : ص = ٢ س − ٣}

فأوجد معادله الخط م/ = سل (م) .

الحل :

النقطتان أ ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) ، ب (٠ ، −٣) واقعتان على الخط م .

حيث أن

سل (س،ص) = (− ص، − س) ∀ (س،ص) ∈ ح[٢]

اذن :

سل ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) = (٠ ، − $\frac{٣}{٢}$)

سل (٠ ، −٣) = (٣ ، ٠)

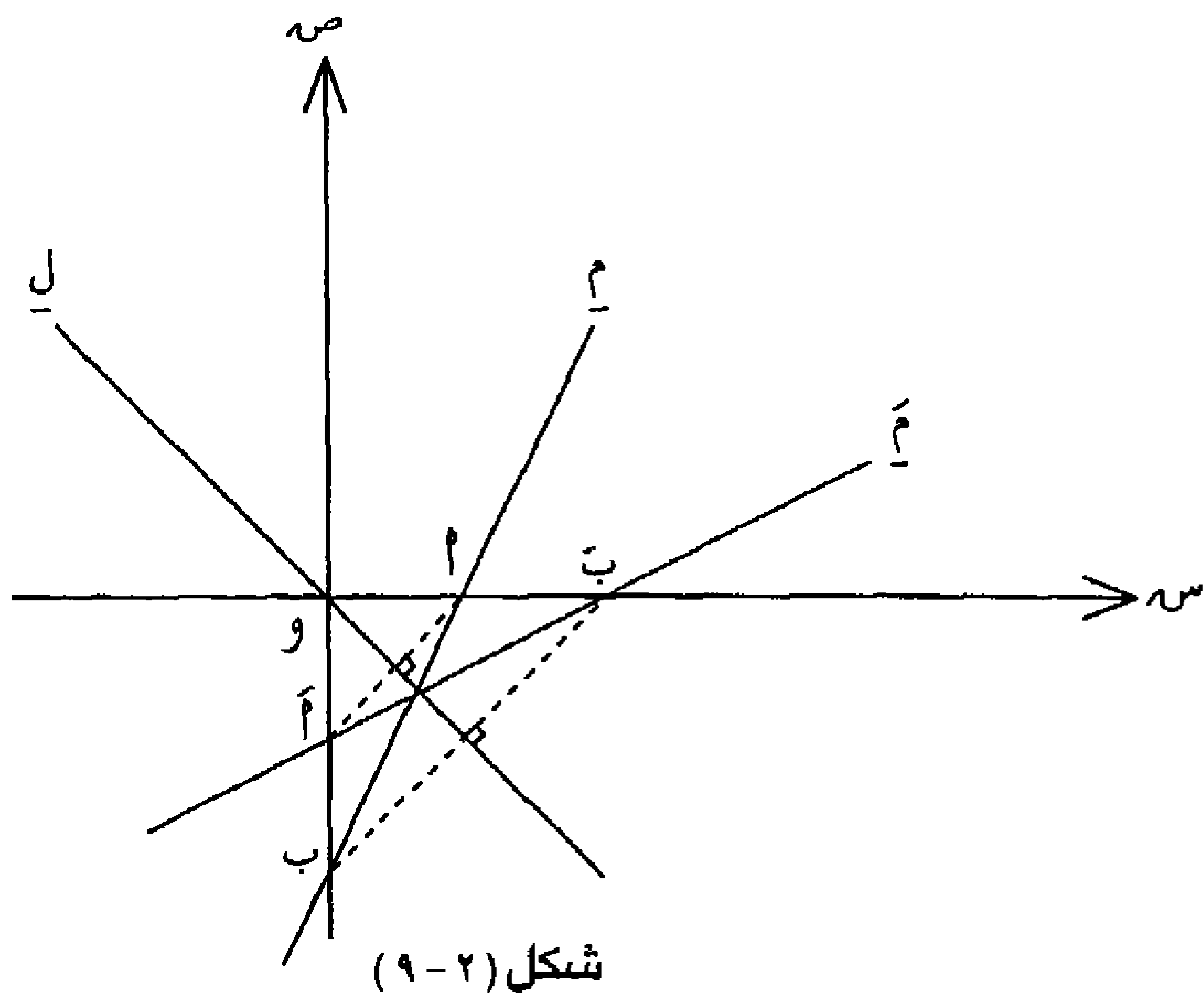
اذن معادله الخط م/ هى :

$$\frac{ص - ٠}{س - ٣} = \frac{- \frac{٣}{٢} - }{٠ - ٣}$$

أى

$$\frac{ص}{س - ٣} = \frac{\frac{٣}{٢}}{٣}$$

$$ص = \frac{س}{٢} - \frac{٣}{٢}$$



شكل (٢-٩)

ملاحظه (٢) : اذا كانت **ب** نقطه معطاه ، ر تحويله مستويه ، فانه يمكن ايجاد نقطه جـ بحيث أن

ر (جـ) = ب كالتالى :

حيث أن ر تحويله مستويه ، فانه يوجد $ر^{-1}$.

بالتالى :

$$(ر^{-1} \circ ر)(\text{جـ}) = ر^{-1}(ر(\text{جـ})) = ر^{-1}(\text{ب})$$

لكن

$$(ر^{-1} \circ ر)(\text{جـ}) = I(\text{جـ}) = \text{جـ}$$

(I هو راسم الوحده)

اذن

$$\text{جـ} = ر^{-1}(\text{ب})$$

مثال (٨) : ليكن ل هو المحور السينى ، م ={ (س،ص) : ص = س} .

أوجد النقطة جـ بحيث أن $(ر_{ل} \circ ر_{م})$ (جـ) = (٢، ٧)

الحل :

من الملاحظة السابقة نجد أن :

جـ = $(ر_{ل} \circ ر_{م})^{-1}$ (٢،٧)

= $(ر_{م}^{-1} \circ ر_{ل}^{-1})$ (٢،٧)

(من ملاحظة (٩) بالباب الأول)

= $(ر_{م} \circ ر_{ل})$ (٢،٧)

(لان $ر_{م}$ ، $ر_{ل}$ رواسم انعكاس)

= $ر_{م}$ ($ر_{ل}$ (٢،٧))

= $ر_{م}$ (٢،−٧) = (−٧،٢)

مثال (٩) : إذا كان ل ={(س،ص) : ص= ٢ س− ٣} ، فأوجد معادلة الخط

م̲ = $ر_{ل}$ (م) ، حيث م ={(س،ص) : ص = ٥س − ٨} .

الحل :

لتكن $ق_{١}$ (٠ ، −٨) ∈ م ، $ق_{٢}$ ($\frac{٨}{٥}$ ، ٠) ∈ م

ولكن من مثال (٦) :

$\check{س}_ل$ (س،ص) = $\frac{١}{م^٢+١}$ ((١ – م^٢) س + ٢م(ص –جـ) ، (م^٢ – ١) ص + ٢م س + ٢جـ)

اذن:

$\check{س}_ل$ (ق١) = $\check{س}_ل$ (٠،–٨) = $\frac{١}{٥}$ (–٢٠، –٣٠) = (–٤، –٦)

وبالتالى فان ق′١ (–٤، –٦).

أيضاً :

$\check{س}_ل$ (ق٢) = $\check{س}_ل$ ($\frac{٨}{٥}$ ، ٠) = ($\frac{٣٦}{٢٥}$ ، $\frac{٢}{٢٥}$)

وبالتالى فان : ق′٢ ($\frac{٣٦}{٢٥}$ ، $\frac{٢}{٢٥}$)

معادله الخط م′ الواصل بين النقطتين ق′١ ، ق′٢ هى :

$$\frac{ص + ٦}{س + ٤} = \frac{\frac{٢}{٢٥} + ٦}{\frac{٣٦}{٢٥} + ٤}$$

$$= \frac{١٥٢}{١٣٦} = \frac{١٩}{١٧}$$

أى أن :

١٩ س – ١٧ ص – ٢٦ = ٠

اذن

م′ = {(س،ص) : ١٩ س – ١٧ ص – ٢٦ = ٠}

٢-٢ : خواص الانعكاس

مما سبق ، نستطيع ان نجمل خواص الانعكاس كالآتى :

١- الانعكاس تحويله هندسية (مستوية)

٢- الانعكاس تساوى قياسى .

٣- الانعكاس يحفظ مقياس الزوايا .

٤-الانعكاس تحويله مضاده (انظر شكل (٢-٢))

٥- الانعكاس يحفظ استقامة النقط ، أى أنه يرسم كل مجموعة من النقط المستقيمة فوق مجموعة من النقط المستقيمة .

٦-الانعكاس يحفظ البينية ، أى أنه اذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقط على استقامة واحده ، وكانت جـ تقع بين أ ، ب وكانت $ر_{ل}$ (أ) = أ/ ، $ر_{ل}$ (ب) = ب/ ، $ر_{ل}$ (جـ) = جـ/ فان جـ/ تقع بين أ/ ، ب/ .

٧- جميع نقط الخط ل صورا لنفسها تحت تأثير راسم الانعكاس $ر_{ل}$ ، فهى تبقى ثابتة . وبلغة أخرى ، نقول أن الانعكاس له نقط ثابتة على محور الانعكاس .

مثال (١٠) : اذا كانت أ ، ب نقطتين فى جهه واحده من خط ل ، فأوجد نقطه جـ ∈ ل بحيث يكون أ جـ + جـ ب أصغر ما يمكن .

الحل :

نفرض أن : $ر_{ل}$ (ب) = ب/

فاذا كانت ق احدى نقط ل ، فان

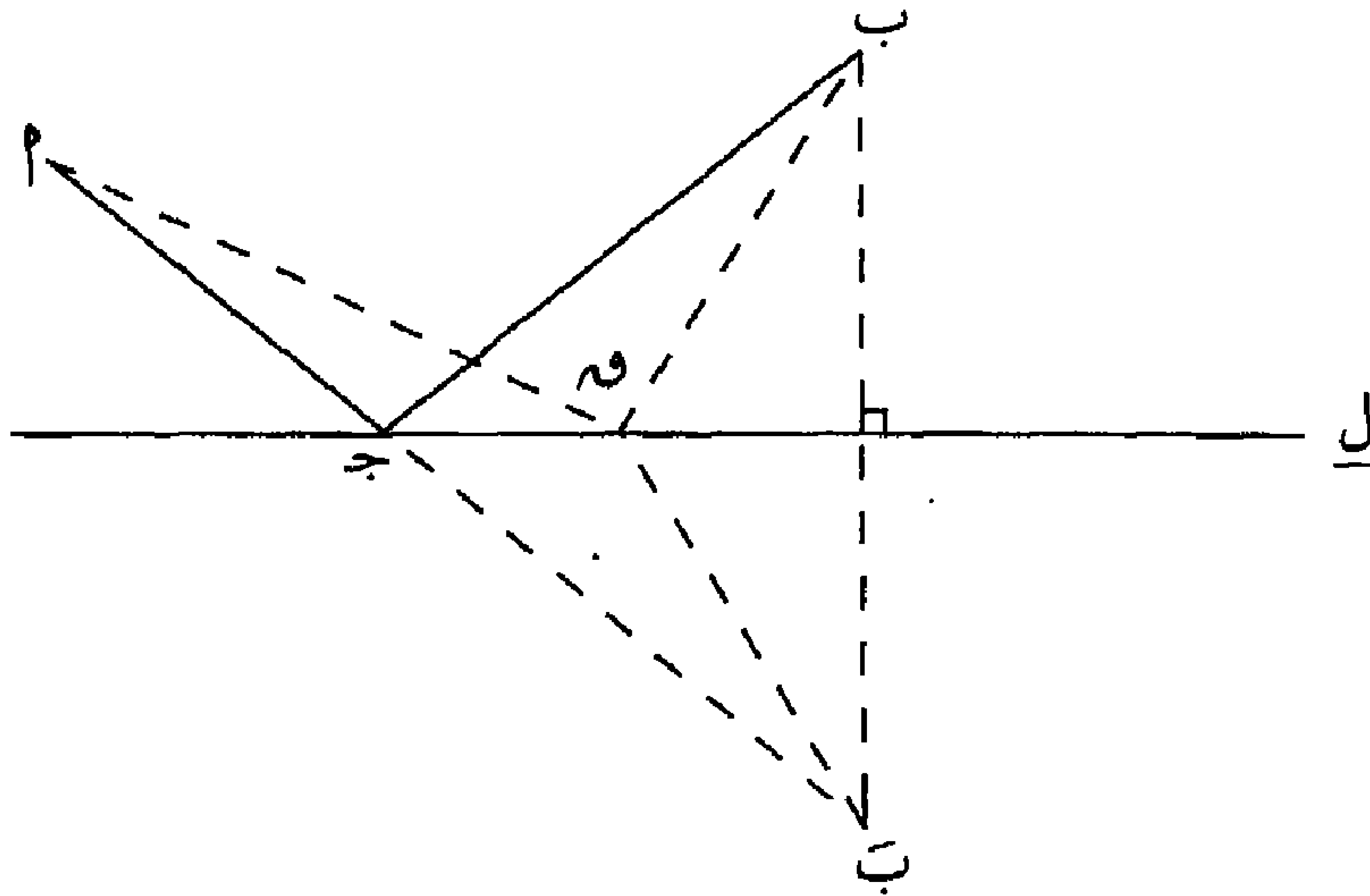
$\overline{أ ق} + \overline{ق ب} = \overline{أ ق} + \overline{ق ب/} > \overline{أ ب/}$

لكن : أ جـ + جـ ب = أ جـ + جـ ب/ = أ ب/

ومن ثم فان

أ ق + ق ب > أ جـ + جـ ب

أى أن النقطة جـ = أ ب/ ∩ ل هى التى تجعل أ جـ + جـ ب أصغر ما يمكن .



شكل (٢-١٠)

مثال (١١):

اذا كانت ع هى مجموعة رواسم الانعكاس فى مستوى ، فأثبت أن النظام (ع ، ٥) يؤلف زمره غير إبداليه .

الحل :

١- خاصيه الانغلاق

نفرض أن $ر_{ل}$ ، $ر_{م}$ ∈ ع .

($ر_{م}$ ٥ $ر_{ل}$) (**ق**) = $ر_{م}$ ($ر_{ل}$ (**ق**)) = $ر_{م}$(**ق**/) = **ق**// ∀ **ق** ∈ ح٢

أى أنه يوجد انعكاس وحيد يرسل ق الى $\text{ق}''$ وبديهى أن محور هذا الانعكاس الجديد هو العمود على $\text{ق}\,\text{ق}''$ من منتصفة .

٢-خاصية الدمج

نفرض أن $\text{ر}_{\underline{\text{ل}}}$ ، $\text{ر}_{\underline{\text{م}}}$ ، $\text{ر}_{\underline{\text{ن}}} \in \text{ع}$. ولأى نقطه $\text{ق} \in \text{ح}^{2}$ ، نفرض أن

$$\text{ر}_{\underline{\text{ل}}}(\text{ق}) = \text{ق}' \text{ ، } \text{ر}_{\underline{\text{م}}}(\text{ق}') = \text{ق}'' \text{ ، } \text{ر}_{\underline{\text{ن}}}(\text{ق}'') = \text{ق}'''$$

وبالتالى ، فان

$$(\text{ر}_{\underline{\text{ن}}} \circ (\text{ر}_{\underline{\text{م}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{ل}}}))(\text{ق}) = \text{ر}_{\underline{\text{ن}}}((\text{ر}_{\underline{\text{م}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{ل}}})(\text{ق}))$$

$$= \text{ر}_{\underline{\text{ن}}}(\text{ر}_{\underline{\text{م}}}(\text{ر}_{\underline{\text{ل}}}(\text{ق})))$$

$$= \text{ر}_{\underline{\text{ن}}}(\text{ر}_{\underline{\text{م}}}(\text{ق}')) = \text{ر}_{\underline{\text{ن}}}(\text{ق}'') = \text{ق}'''$$

أيضاً ،

$$((\text{ر}_{\underline{\text{ن}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{م}}}) \circ \text{ر}_{\underline{\text{ل}}})(\text{ق}) = (\text{ر}_{\underline{\text{ن}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{م}}})(\text{ر}_{\underline{\text{ل}}}(\text{ق}))$$

$$= (\text{ر}_{\underline{\text{ن}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{م}}})(\text{ق}')$$

$$= \text{ر}_{\underline{\text{ن}}}(\text{ر}_{\underline{\text{م}}}(\text{ق}')) = \text{ر}_{\underline{\text{ن}}}(\text{ق}'') = \text{ق}'''$$

أى أن :

$$(\text{ر}_{\underline{\text{ن}}} \circ (\text{ر}_{\underline{\text{م}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{ل}}}))(\text{ق}) = ((\text{ر}_{\underline{\text{ن}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{م}}}) \circ \quad)(\text{ق})$$

٣- خاصية العنصر المحايد

نفرض أن : $\text{ر}_{\underline{\text{ل}}}(\text{ق}) = \text{ق}'$

$$(س_{ل} \circ س_{ل})(ق) = س_{ل}\left(س_{ل}(ق)\right) = س_{ل}(ق') = ق = I(ق)$$

حيث I هو راسم الوحدة ، أى أن $س_{ل} \circ س_{ل} = س_{ل}^{2} = I$ **، وبلغة آخرى ، فأن**

راسم **الأنعكاس** $س_{ل}^{2} = I$ هو التحويلة المحايدة للنظام (ع ، o) لأن :

$$س_{ل} \circ I = I \circ س_{ل} \qquad \text{لكل} \qquad س_{ل} \in ع$$

٤- خاصية المعكوس

حيث أن $س_{ل} \circ س_{ل} = I$ ، فان $س_{ل} = س_{ل}^{-1}$

أى أنه لكل $س_{ل} \in ع$ يوجد معكوس $س_{ل}^{-1} \in ع$ بحيث أن

$$س_{ل} \circ س_{ل}^{-1} = I = س_{ل}^{-1} \circ س_{ل} \qquad \forall\ س_{ل} \in ع .$$

من الخواص السابقة ، نستنتج أن النظام يؤلف زمره .

٥- خاصية الابدال

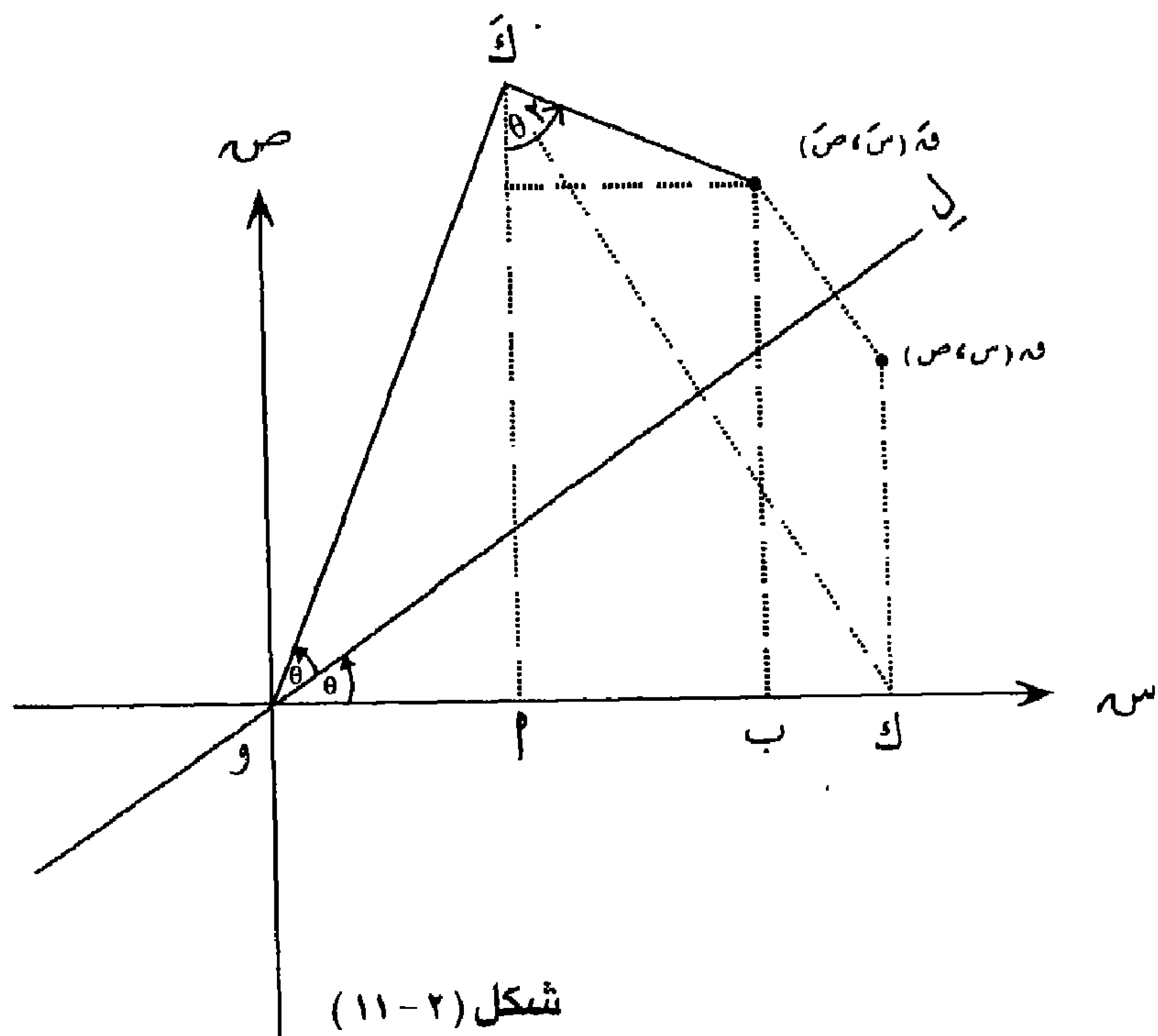
لاحظ أن : $س_{ل} \circ س_{م} \neq س_{م} \circ س_{ل}$ إلا اذا كان $ل \perp م$

لذلك ، فالنظام (ع ، o) يؤلف زمره غير إيداليه .

٢-٣: مصفوفة الانعكاس

نفرض أن ل خط مستقيم مار بنقطه الأصل و ، ويصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .

لتكن **ق**$^{/}$ (س$^{/}$، ص$^{/}$) هى صوره **ق** (س ، ص) بالانعكاس بالنسبة للخط ل. ولتكن النقطة ك$^{/}$ هى صوره النقطة ك التى هى موقع العمود من النقطة **ق** على محور السنيات (انظر شكل (٢-١١)).



شكل (٢-١١)

من الشكل يتضح أن : •

$\angle$ ك و ك$'$ = $\angle$ ق$'$ ك$'$ جـ = ٢ θ

ويكون:

س$'$ = $\overline{\text{وب}}$ = $\overline{\text{وأ}}$ + $\overline{\text{أب}}$

= $\overline{\text{و ك}'}$ حتا ٢ θ + $\overline{\text{ق}'\text{ك}'}$ حا ٢ θ

= $\overline{\text{و ك}}$ حتا ٢ θ + $\overline{\text{ق ك}}$ حا ٢ θ (i)

= س حتا ٢ θ + ص حا ٢ θ

وبالمثل ،

ص$'$ = $\overline{\text{ق}'\text{ب}}$ = $\overline{\text{أ جـ}}$ = $\overline{\text{ك}'\text{أ}}$ – $\overline{\text{ك}'\text{جـ}}$

= $\overline{\text{و ك}'}$ حا ٢ θ – $\overline{\text{ك}'\text{ق}'}$ حتا ٢ θ

= $\overline{\text{و ك}}$ حا ٢ θ – $\overline{\text{ك ق}}$ حتا ٢ θ

= س حا ٢ θ – ص حتا ٢ θ (ii)

المعادلتان (i) ، (ii) يمكن كتابتهما فى الصوره المصفوفيه التالية :

$$\begin{bmatrix} \text{حتا}\,2\theta & \text{حا}\,2\theta \\ \text{حا}\,2\theta & -\text{حتا}\,2\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix}$$

المصفوفة

$$\begin{bmatrix} \text{حتا}\,2\theta & \text{حا}\,2\theta \\ \text{حا}\,2\theta & -\text{حتا}\,2\theta \end{bmatrix}$$

تسمى **مصفوفه الانعكاس** . هذه المصفوفة هى مصفوفة تحويل مناظره لعملية الانعكاس فى خط لِ يمر بالنقطه و(٠،٠) ويصنع زوايه θ مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .ويلاحظ هنا أن محدد هذه المصفوفه يساوى (−١).

ملاحظه (٣) :

١− مصفوفة الانعكاس بالنسبة الى محور السنيات :

$$\text{ع}_{\text{س}} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$$

٢−مصفوفه الانعكاس بالنسبه الى محور الصادات:

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

لا حظ هنا أن محدد كل من $\text{ع}_{\text{ص}}$ ، $\text{ع}_{\text{س}}$ يساوى (−١) .

مثال (١٢) : أثبت أن المصفوفه $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ج} \\ \text{ج} & -\text{أ} \end{pmatrix}$ تمثل انعكاسا لجميع قيم أ،ج وذلك بفرض أن التحويل تساوى قياسى .

الحل :

نفرض مربع الوحده الذى رؤوسه (٠،٠)،(١،٠)،(١،١)،(٠،١) .من شكل (١-٧) مثال (٢٤) وجدنا أن صور هذه النقط على الترتيب هى

(٠،٠) ، (أ ، ج)،(أ + ب ، ج + د) ، (ب ، د) وذلك تحت تأثير مصفوفه التحويل :

$$\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix} \qquad (i)$$

وتبين لنا أن المربع تحول الى متوازى الأضلاع و **ق** ل ع . فإذا مثلت المصفوفه إنعكاساً، فان أطوال الأضلاع المتناظره لاتتغير وذلك من خاصية التساوى القياسى

اذن :

$$\overline{(و \ ق)}^{٢} = ١$$

أى أن :

$$أ^{٢} + ج^{٢} = ١$$

وبالمثل :

$$\overline{(و \ ع)}^{٢} = ب^{٢} + د^{٢} = ١$$

أيضا :

$$\overline{(ق \ ع)}^{٢} = (١ - ٠)^{٢} + (٠ - ١)^{٢}$$

$$= (أ - ب)^{٢} + (ح - د)^{٢}$$

أى أن :

$$أ^{٢} + ج^{٢} + ب^{٢} + د^{٢} - ٢أ \ ب - ٢ج \ د = ١ + ١$$

$$١ + ١ - ٢أ \ ب - ٢ج \ د = ٢$$

أى أن

$$أ\,ب + ج\,د = ٠$$

اذن

$$أ\,ب = - ج\,د$$

أو $\frac{أ}{د} = - \frac{ج}{ب} = \lambda$ (مثلاً)

اذن

$$أ = \lambda\,د \quad ، \quad ج = - \lambda\,ب$$

بما أن

$$أ^٢ + ج^٢ = ١$$

اذن

$$\lambda^٢ د^٢ + \lambda^٢ ب^٢ = ١$$

أى :

$$\lambda^٢ (د^٢ + ب^٢) = ١ \qquad \text{ومنها } \lambda^٢ = ١$$

أى أن : $\lambda = \pm ١$

وحيث أن العملية عمليه انعكاس ، فيجب أن يكون المحدد مساوياً (−١) .

أى أن :

$$أ\,د - ب\,ج = -١$$

وبالتالى تكون :

$$أ = \lambda د = -د \text{ ، } ج = - \lambda\,ب = ب$$

وتصبح المصفوفه (i) : $\begin{pmatrix} أ & ج \\ ج & -١ \end{pmatrix}$ (ii)

وهى النتيجه المراد أثباتها .

وبوضع أ = حتا ٢ θ ، ج = حا ٢ θ فى (ii)

نحصل على المصفوفة :
$$\begin{bmatrix} \text{حتا}٢\theta & \text{حا}٢\theta \\ \text{حا}٢\theta & -\text{حتا}٢\theta \end{bmatrix}$$

هى نفس النتيجه التى حصلنا عليها سابقاً . ويجب ملاحظه أن هذا التحويل يعكس المستوى فى الخط ل : ص = (طا θ) س الذى يصنع زاويه θ مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .

مثال (١٣) : باستخدام مصفوفة الانعكاس ، أوجد قاعده الانعكاس للخط

ل = {(س ، ص) : ص = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ س}

الحل :

طاθ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\Leftarrow$ θ = ٣٠ $\Leftarrow$ ٢ θ =٦٠

بالتالى ،فان : حتا٢θ = حتا٦٠ = $\frac{١}{٢}$

حا٢θ = حا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

اذن قاعده الانعكاس:

$$\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{3}}{2}ص \\ \frac{\sqrt{3}}{2}س - \frac{1}{2}ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix}$$

أى : $س' = \frac{1}{2}(س + \sqrt{3}\,ص)$ ، $ص' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,س - ص)$

وهى نفس النتيجه التى حصلنا عليها فى مثال (٥) .

مثال (١٤) : إذا كان

$$\underline{ل} = \{(س ، ص) : ص = - س\}$$

فان :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix}$$

أى أن

$$س' = - ص ، ص' = - س$$

وبالتالى ، فان

$$ر_{\underline{ل}}(س،ص) = (- ص ، - س)$$

وهى نفس النتيجه التى حصلنا عليها فى مثال (٣) .

مثال (١٥) : فى هذا المثال ، سنحاول حل مثال (٤) باستخدام مصفوفة الانعكاس.
حيث أن

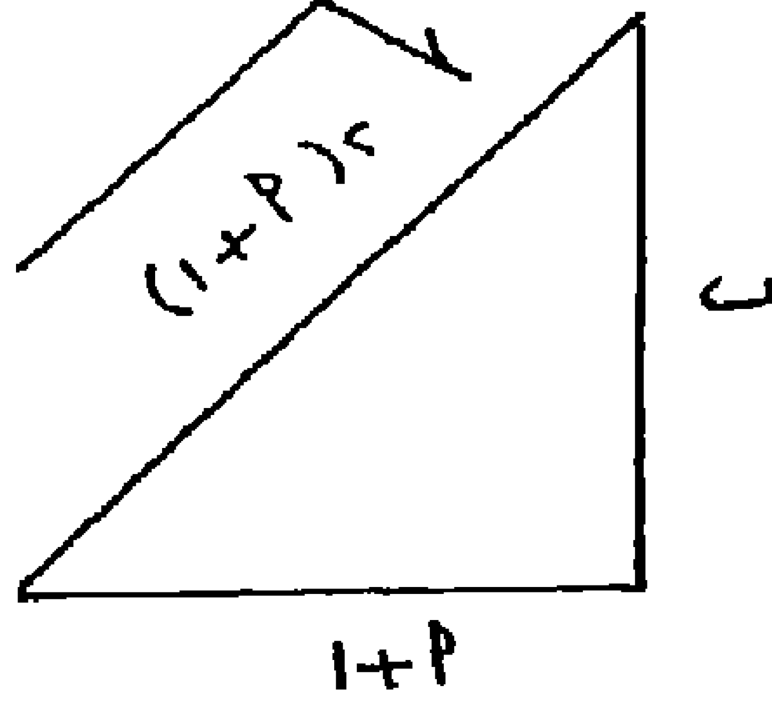
$$\underline{ل} = \{(س،ص): ص = \frac{ب}{أ + 1} س ، أ \neq -1 ، أ^2 + ب^2 = 1\}$$

فان :

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{ب}}{\text{أ} + ١} = \text{ميل الخط } \underline{\text{ل}}$$

من الشكل (٢-١٢) ينتج أن :

$$\text{حا}\,\theta = \frac{\text{ب}}{\sqrt{٢\,(\text{أ} + ١)}}$$



شكل (٢-١٢)

$$\text{حتا}\,\theta = \frac{\text{أ} + ١}{\sqrt{٢\,(\text{أ} + ١)}}$$

لكن :

$$\text{حا}\,٢\theta = ٢\,\text{حا}\,\theta\,\text{حتا}\,\theta = ٢\,\frac{\text{ب}}{\sqrt{٢\,(\text{أ} + ١)}} \times \frac{\text{أ} + ١}{\sqrt{٢\,(\text{أ} + ١)}} = \text{ب}$$

أيضاً :

$$\text{حتا}\,٢\theta = ١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\,\theta =$$

$$١ - ٢\left(\frac{\text{ب}^{٢}}{٢\,(\text{أ} + ١)}\right) = ١ - \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ} + ١} = \frac{(\text{أ} + ١) - \text{ب}^{٢}}{\text{أ} + ١}$$

$$= \frac{(\text{أ} + ١) - (١ - \text{أ}^{٢})}{\text{أ} + ١} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{أ}}{\text{أ} + ١} = \frac{\text{أ}\,(\text{أ} + ١)}{\text{أ} + ١} = \text{أ}$$

اذن ، قاعده الانعكاس :

$$\begin{bmatrix} \text{حتا}2\theta & \text{حا}2\theta \\ \text{حا}2\theta & -\text{حتا}2\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}^{/} \\ \text{ص}^{/} \end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} \text{أ س} + \text{ب ص} \\ \text{ب س} - \text{أ ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س}^{/} \\ \text{ص}^{/} \end{bmatrix}$$

وبالتالى :

$\text{س}^{/} = \text{أ س} + \text{ب ص}$ ، $\text{ص}^{/} = \text{ب س} - \text{أ ص}$

أى أن :

$ر_{\underline{ل}}$ (س،ص) = (أ س + ب ص ، ب س − أ ص)

وهى نفس النتيجه التى حصلنا عليها فى مثال (٤) .

ملاحظة (٣) : فى المثال السابق ، شاهدنا أنه اذا كان

$\underline{ل}$ ={ (س،ص) : ص = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ س ، أ ≠ −١ ، $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ = ١}

فان **مصفوفه الانعكاس** هى :

$$\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & -\text{أ} \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة هى مصفوفه تحويل مناظره لعملية الانعكاس فى الخط $\underline{ل}$.

مثال (١٦) : نفرض أن $\underline{ل}$ = { (س،ص) : ص = ٣ س} . اذا كانت ق(٤،٣)
فأوجد ق/ حيث ق/ = $ر_{\underline{ل}}$ (ق) .

الحل :

نضع :

$$\frac{ب}{أ + ١} = ٣$$

$$ب = ٣ أ + ٣ \qquad (i)$$

$$، \quad أ^{٢} + ب^{٢} = ١ \qquad (ii)$$

بحل (i) ، (ii) ينتج أن :

$$أ = -\frac{٤}{٥} \quad ، \quad ب = \frac{٣}{٥}$$

من ملاحظة (٣) ، تكون مصفوفه الانعكاس هى :

$$\begin{pmatrix} -\frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \end{pmatrix}$$

وبالتالى فان :

$$\begin{pmatrix} -\frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س/ \\ ص/ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{١٦}{٥} + \frac{٩}{٥} \\ \frac{١٢}{٥} + \frac{١٢}{٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س/ \\ ص/ \end{pmatrix}$$

اذن :

$$س/ = -\frac{٧}{٥} \quad ، \quad ص/ = \frac{٢٤}{٥}$$

أى أن :

$$ر_{ل}(٤،٣) = \left(-\frac{٧}{٥} ، \frac{٢٤}{٥}\right)$$

لاحظ هنا أن مصفوفه الانعكاس هى مصفوفه تحويل مناظره لعمليه الانعكاس ف ل .

مثال (١٧) : أوجد قاعده الانعكاس للخط

$$ل = \{ (س،ص) : ص = \sqrt{٣}\, س \} .$$

الحل :

$$طا\,\theta = \sqrt{٣}$$

اذن :

$$\frac{ب}{أ + ١} = \sqrt{٣} .$$

$$ب = \sqrt{٣}\, أ + \sqrt{٣} \qquad (i)$$

$$أ^{٢} + ب^{٢} = ١ \qquad (ii)$$

بحل (i) ، (ii) ينتج أن:

$$أ = -\frac{١}{٢} ، ب = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

وبالتالى فان مصفوفه الانعكاس هى :

$$\begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$$

وبالتالى فان :

$$\begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{3}}{2}ص \\ \frac{\sqrt{3}}{2}س + \frac{1}{2}ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix}$$

ومن تساوى مصفوفتين ينتج أن :

$$س' = \frac{1}{2}(-س + \sqrt{3}ص) \quad ، \quad ص' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}س + ص)$$

اذن

$$ر_{\underline{ل}}(س،ص) = \frac{1}{2}(-س + \sqrt{3}ص ، \sqrt{3}س + ص)$$

وهى قاعده الانعكاس للخط $\underline{ل}$.

تمارين عامـــه

١- ليكن ل ={(س،ص) : س = - ٣}

أ- أوجد ق/ = رل (ق)   اذا كانت ق (٢،٥)

ب- أوجد جـ   بحيث أن   رل (جـ) = (-١،٧)

جـ- اذا كانت ك (س،ص) أى نقطه ، فعين رل (ك) .

٢-ليكن م = { (س،ص) : ص = ٢}

أ- أوجد ق/ = رم(ق) اذا كانت ق (٣ ، √٢)

ب- أوجد د اذا كان رم (د) = (٢،-٤)

جـ- اذا كانت ك (س،ص) أى نقطه ، فعين رم (ك) .

٣-نفرض أن ل ={(س،ص) : ص + ٢س = ٣} ، أ (٢، ن) . احسب ن اذا كان رل (أ) = أ

٤- نفرض أن م = {(س،ص) : ن س - ٣ص + ١ = ٠} ، ب (٣،-١) .

احسب ن اذا كان رم (ب) = ب .

٥-لتكن أ(١،-١) ، ب(٤،٠) ، جـ (-٤،١) ، د (-٢،ن) . إذا كان ت تساوى قياسى يرسل أ فوق جـ ، ب فوق د ، فاحسب ن .

٦- اذا كان ل ={(س،ص) : س+٢ص = ١} ،

م ={(س،ص) : س = -١}

فأوجد معادله (أ) ل' = ر م (ل) ، (ب) م' = ر ل (م)

٧- اذا كان ل ={(س،ص) : ص = ٢ س -١}

م ={ (س،ص) : ص = س}

ن ={(س،ص) : ص = -٤}

فأوجد :

(أ) ر ل (م) (ب) ر ل (ن)

(ج) ر م (ل) (ء) ر م (ن)

٨- اذا كان ل ={ (س،ص) : ص = - س}

م ={(س،ص) : ٣ص = س + ٣}

فهل النقطه أ(-٢،-٤) تقع على الخط م' = ر ل (م)

٩- إذا كان ل = {(س،ص) : ص=٣} ، م = {(س،ص) : ص = -١} ن خط مار بالنقطتين أ (١،٤)، ب(-١،-٢) فعين الآتى :

١-اكتب معادله الخط ن = (ر ل ∘ ر م) (ن)

٢- أوجد ق'' = (ر ل ∘ ر م) (ق) ∀ ق (س،ص) ∈ ح٢ .

١٠- إذا كانت أ(-٤،٣) ، ب (٢،٥) نقطتين في جهه واحده من محور السنيات
سِ ، فأوجد نقطه جــ ∈ سِ بحيث يكون أجــ + جــ ب أصغر ما يمكن .

١١- لتكن **ق** (٨،٦) ، فأوجد **ق**/ = ر لِ (**ق**) اذا كان :

أ- لِ = {(س،ص) : ص =٥ س}

ب- لِ ={(س،ص) : ص = $\sqrt{٣}$ س }

ج- لِ ={(س،ص) : ص = س + ١}

ء- لِ ={(س،ص) : ص = ٢ س - ٨ }

هـ- لِ ={(س،ص) : ص - ٢ س - ٥ = ٠ }

و- لِ ={(س،ص) : ص = $\sqrt{٣}$ س - ١ }

١٢-ارسم المثلث {(٠،٠) ، (٠،٥) ، (١٠،٥)} ثم أوجد صورته تحت تأثير كل من التحويلات الآتيه :

أ- $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \\ -\frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \end{pmatrix}$ ب- $\begin{pmatrix} \frac{٤}{٥} & -\frac{٣}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \end{pmatrix}$ ج- $\begin{pmatrix} \frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ -\frac{٣}{٥} & \frac{٤}{٥} \end{pmatrix}$

ماتأثير كل تحويله ؟

١٣- ارسم الشكل الذى رؤوسه بالترتيب هى :

{(٠،٠) ، (١،٠) ، (١،٢) ، (٢،٤) ، (٠،٢) }

ثم أوجد صورة هذا الشكل تحت تأثير كل من التحويلات الآتيه :

أ- $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ -٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ب- $\begin{pmatrix} ٠ & \frac{٥}{٢} \\ \frac{٥}{٢} & ٠ \end{pmatrix}$ ج- $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

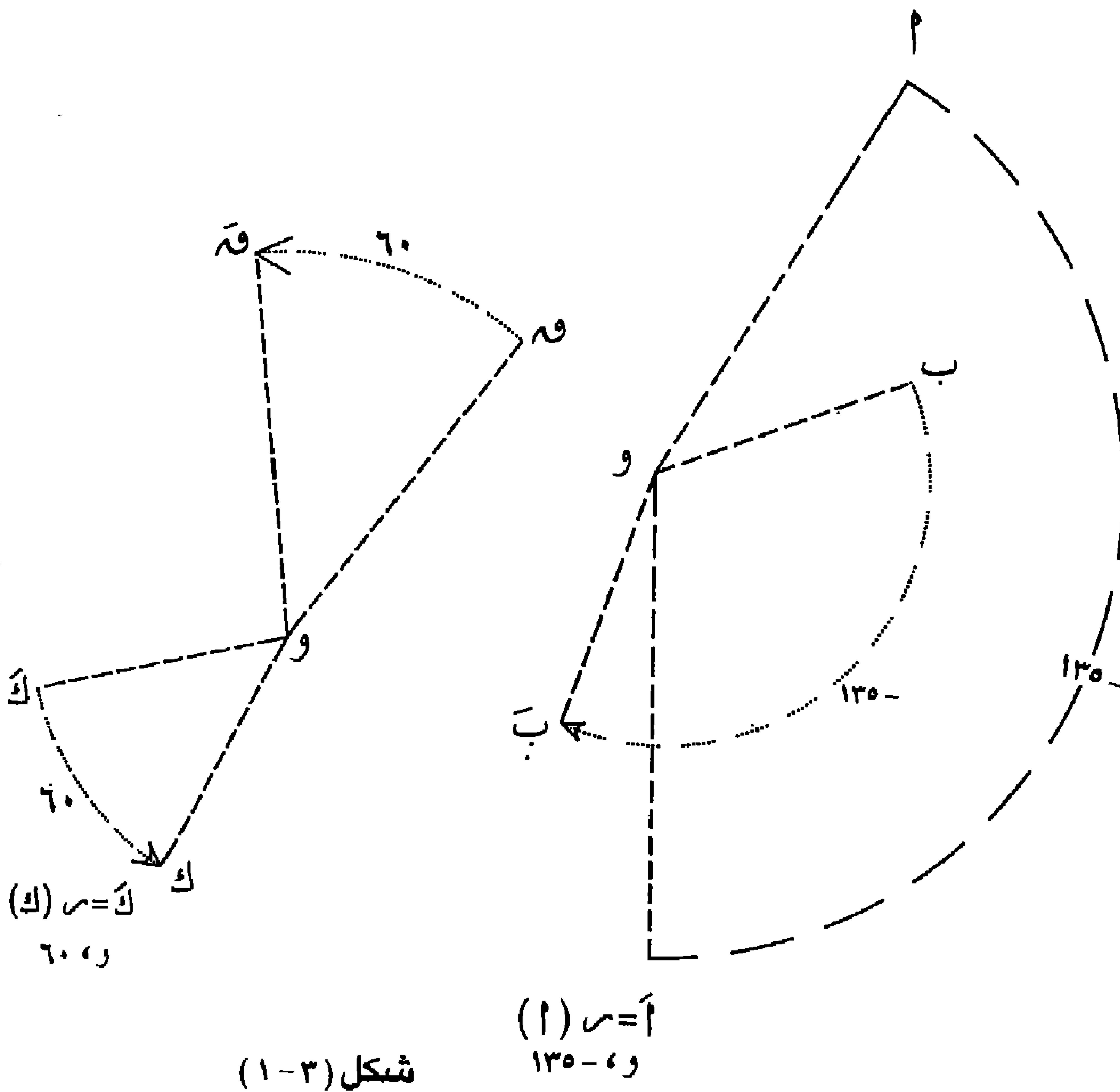
الباب الثالث

الدوران

٣-١: صوره النقطه بالدوران

تعريف : لنفرض أن و نقطه معطاه، θ عدد بين -١٨٠ ، ١٨٠ .

<u>**الدوران**</u> حول و بزاويه θ هو راسم $ر_{و، \theta}$ معرف لجميع نقط المستوى كالتالى :



شكل (٣-١)

١- $ر_{و ، \theta}$ (و) = و

٢- ∀ ق ≠ و يكون $ر_{و ، \theta}$ (ق) = ق′ بحيث أن، ∠ ق و ق′ = θ، $\overline{وق′}$ = $\overline{وق}$.

من التعريف السابق نلاحظ أن : صوره أى نقطه ق تحت تأثير $ر_{و ، \theta}$ تقع على دائره مركزها و ونصف قطرها وق .

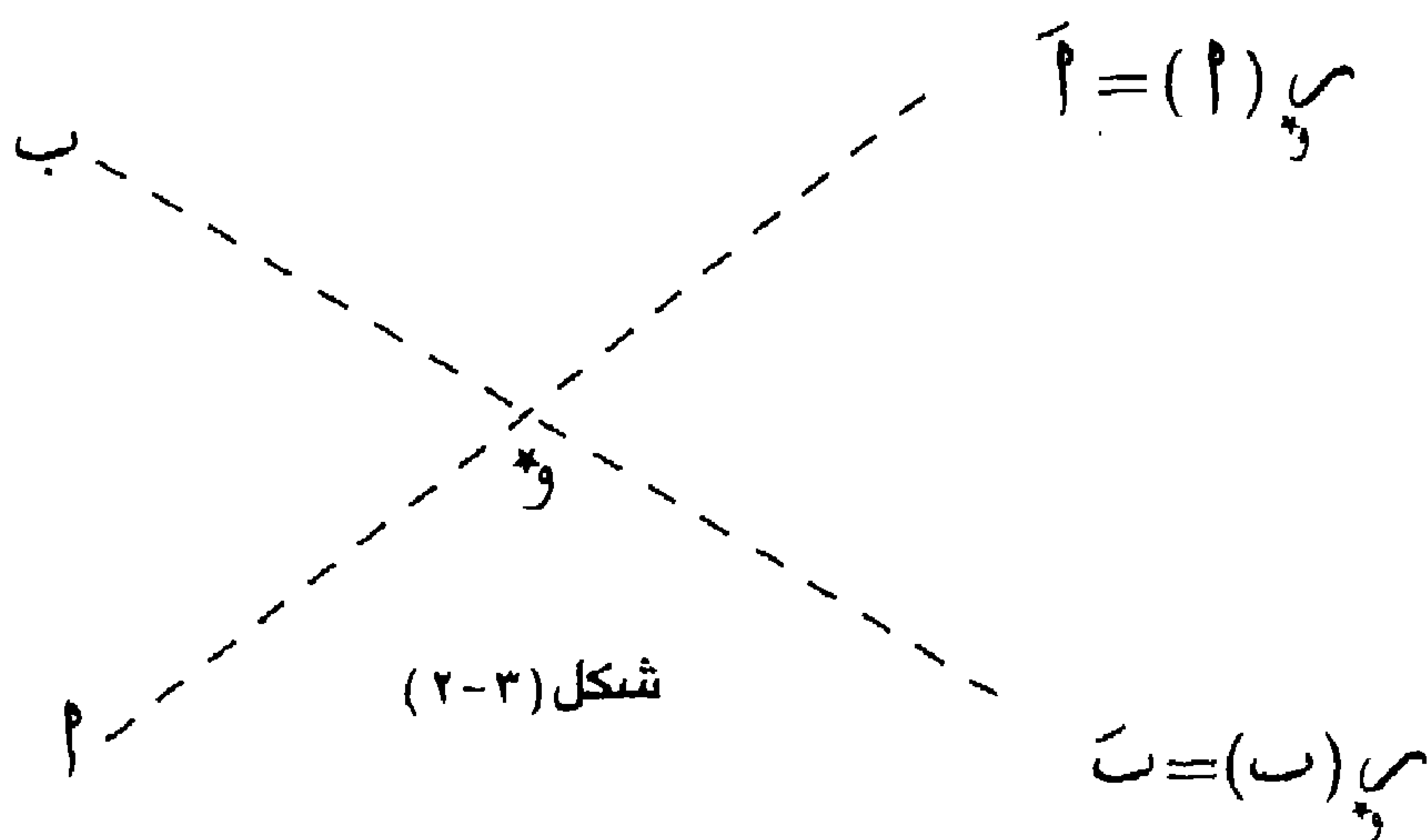
علاوه على ذلك ، فان زاويه الدوران يجب أن تقع بين -١٨٠ ، +١٨٠ فى اتجاه مع عقارب الساعه عند θ > . وفى اتجاه مضاد لعقارب الساعه عند θ < .

أيضاً ، من التعريف نستنتج أن : أى دوران هو تحويله هندسيه (مستويه) وكذلك تساوى قياسى .

٣-٢: نصف الدوره

تعريف : **نصف الدوره** حول نقطه معطاه و* عباره عن راسم $ر_{و^*}$ معرف لكل نقطه ق فى المستوى كالتالى :

١- اذا كانت ق ≠ و* فان $ر_{و^*}$ (ق) = ق′ بحيث و* منتصف القطعه المستقيمه $\overline{ق ق′}$.



شكل (٣-٢)

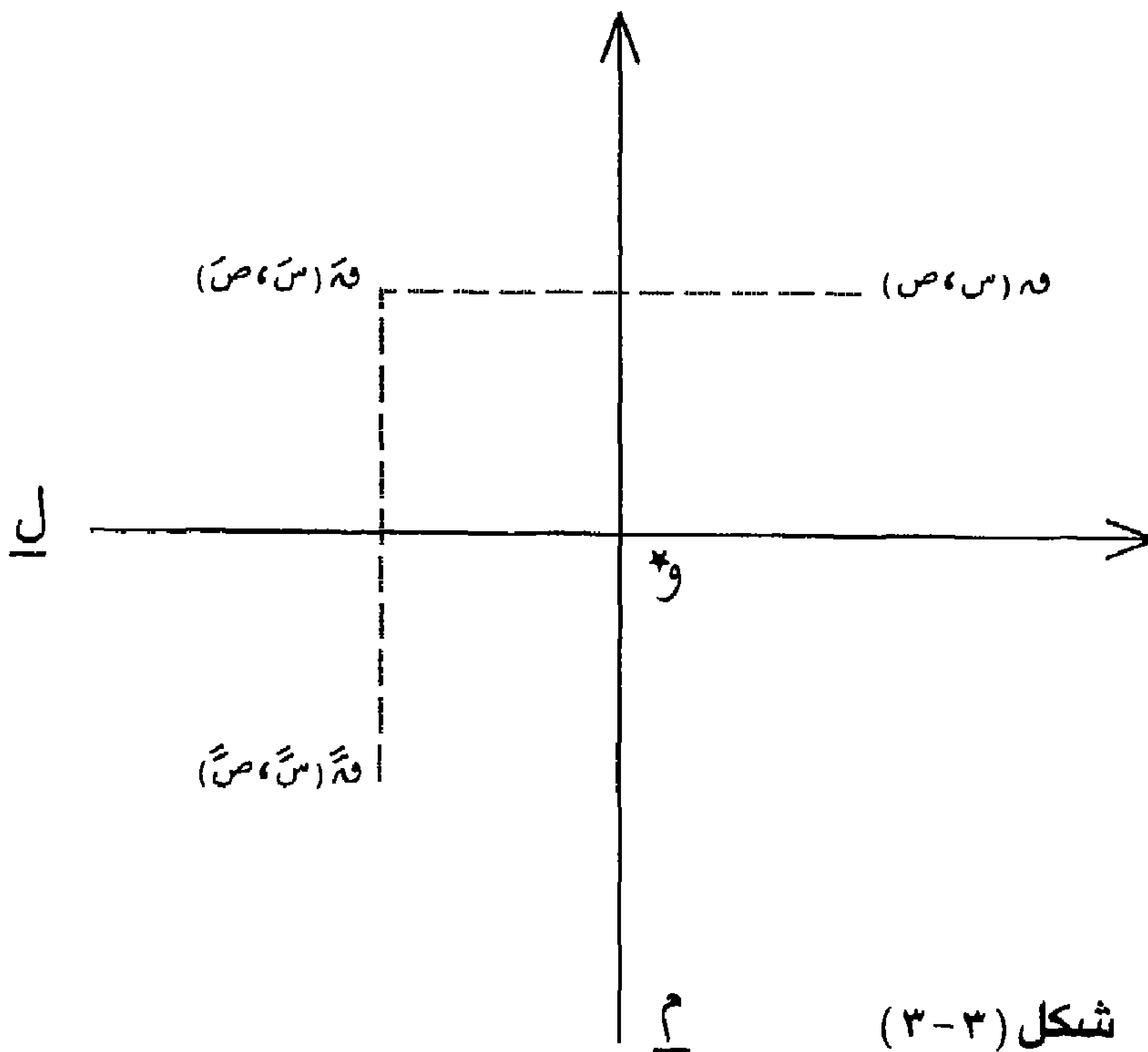
٢- $\sigma_{و^*}$ (و*) = و*

من هذا التعريف يتضح أيضاً أن نصف الدوره هى تحويله هندسيه (مستويه). من تعريف نصف الدورد يتضح لنا أن هذا الراسم هو حاله خاصه من التعريف العالم لراسم الدوران $\sigma_{و ، \theta}$. عند وضع θ = ط ، فان $\sigma_{و ، ط}$ هو راسم نصف دوره وعادة نكتبه $\sigma_{و}$ فقط للسهوله .

نظريه (١) : اذا كان لَ ⊥ مَ ، و* = لَ ∩ مَ ؛ فان

$$\sigma_{و^*} = \sigma_{لَ} \circ \sigma_{مَ}$$

البرهان :



شكل (٣-٣)

حيث أن لَ ⊥ مَ ، فانه يمكننا أخذ لَ كمحور للسنيات ، مَ كمحوراً للصادرات ، و* كنقطه للأصل .

المطلوب اثبات أن :

$$ر_{و^*}(ق) = ر_ل \circ ر_م (ق) \quad ، \quad \forall\, ق \in ح^2$$

أولاً، لتكن ق (س ، ص) $\in$ ح^2 بحيث أن ق $\neq$ و*

لنأخذ $ر_{و^*}(ق) = ق^*$

أو

$$ر_{و^*} \text{ (س ، ص) = (س}^* \text{ ، ص}^* \text{)}$$

اذن و* تنصف القطعه المستقيمه $\overline{ق\, ق^*}$. وبالتالى فان

$$٠ = \frac{١}{٢}(س + س^*) \quad ، \quad ٠ = \frac{١}{٢}(ص + ص^*)$$

أى

$$س^* = -\,س \quad ، \quad ص^* = -\,ص$$

اذن

$$ر_{و^*} \text{ (س ، ص) } = \text{ (−س ، − ص) } \qquad \text{(i)}$$

لكن

$$\text{(} ر_ل \circ ر_م \text{) (س ، ص) } = ر_ل \text{ (} ر_م \text{(س ، ص))}$$

$$= ر_ل \text{ (−س ، ص)}$$

$$= \text{ (−س ، −ص) } \qquad \text{(ii)}$$

من (i) ، (ii) نستنتج أن :

لكن $ر_{و^*}(ق) = (ر_ل \circ ر_م)(ق)$ ، ق $\neq$ و*

وحيث أن .

$(ر_{ل} \circ ر_{م})(و^*) = ر_{ل}(ر_{م}(و^*)) = ر_{ل}(و^*) = و^*$ ، $ر_{و^*}(و^*) = و^*$

و بصفه عامه ،يكون

$$ر_{ل} \circ ر_{م} = ر_{و^*}$$

نتيجه (١) : اذا كان $ل \perp م$ ، فان $ر_{ل} \circ ر_{م} = ر_{م} \circ ر_{ل}$.

نتيجه (٢) : اذا كان $ر_{و^*}$ نصف دوره ، فان $ر_{و^*}^{-1} = ر_{و^*}$.

البرهان :

$$ر_{و^*} = ر_{ل} \circ ر_{م} \quad ، \quad ل \perp م$$

(من نظريه (١))

$$ر_{و^*}^{-1} = (ر_{ل} \circ ر_{م})^{-1}$$

(من تعريف التساوى)

$$= ر_{م}^{-1} \circ ر_{ل}^{-1}$$

(ملاحظة(٩)بالباب الأول)

$$= ر_{م} \circ ر_{ل}$$

(خاصية المعكوس)

$$= ر_{و^*}$$

(من نتيجه (١))

نظريه (٢) : اذا كانت $و^* = (أ،ب)$ ، **ق**(س ، ص) $\in ح^{٢}$ ، فان

$$ر_{و^*}(س ، ص) = (٢أ - س ، ٢ب - ص)$$

البرهان :

نفرض أن : $ر_{و^*}(ق) = ق'$

أو $ر_{و^*}(س،ص) = (س'،ص')$

اذن و* هى منتصف القطعة المستقيمه $\overline{ق\,ق'}$. وبالتالى فان

$$أ = \frac{1}{2}(س + س') \quad ، \quad ب = \frac{1}{2}(ص + ص')$$

أى

$$س' = 2أ - س \quad ، \quad ص' = 2ب - ص$$

اذن

$$ر_{و^*}(س،ص) = (2أ - س ، 2ب - ص) .$$

مثال (١) :اذا كانت و* = (٢،٣) ، فعين

١ - $ر_{و^*}$ (٢،٣) ٢- $ر_{و^*}$ (-٢،٧) ٣ - $ر_{و^*}^{-1}$ (٤،-١)

الحل :

من نظرية (٢)، نعلم أن

$$ر_{و^*}(س ، ص) = (2أ - س ، 2ب - ص)$$

حيث هنا أ = ٢ ، ب = ٣ .

١- $ر_{و^*}$ (٢ ، ٣) = (٤ -٢ ، ٦-٣) = (٢ ، ٣)

٢- $ر_{و^*}$ (-٢ ، ٧) = (٤ +٢ ، ٦- ٧) = (٦ ، -١)

٣- $ر_{و^*}^{-1}$ (٤ ، -١) = $ر_{و^*}$ (٤ ، -١)

=(٤-٤ ، ٦+١)

=(٠ ، ٧)

مثال (٢) : اذا كانت و* = (-١،٠) ، فأوجد معادله كل من ل ، م اذن علم أن

ب (٣،٤) ∈ ل ، $س_{و^*} = س_{ل} \circ س_{م}$.

الحل :

$س_{و^*} = س_{ل} \circ س_{م}$ ل ⊥ م ، ل ∩ م = و*

نفرض أن $م_{١}$ هو ميل الخط ل ، $م_{٢}$ هو ميل الخط م .

اذن

$$م_{١} = \frac{٠ - ٤}{-١ - ٣} = ١$$ (لأن و* ، ب ∈ ل) ،

$$م_{٢} = -١$$ (لأن ل ⊥ م)

معادله الخط ل هى : .

ص - ٤ = س - ٣

أو ل = {(س،ص) : ص - س - ١ = ٠}

أيضا ، معادله الخط م هى :

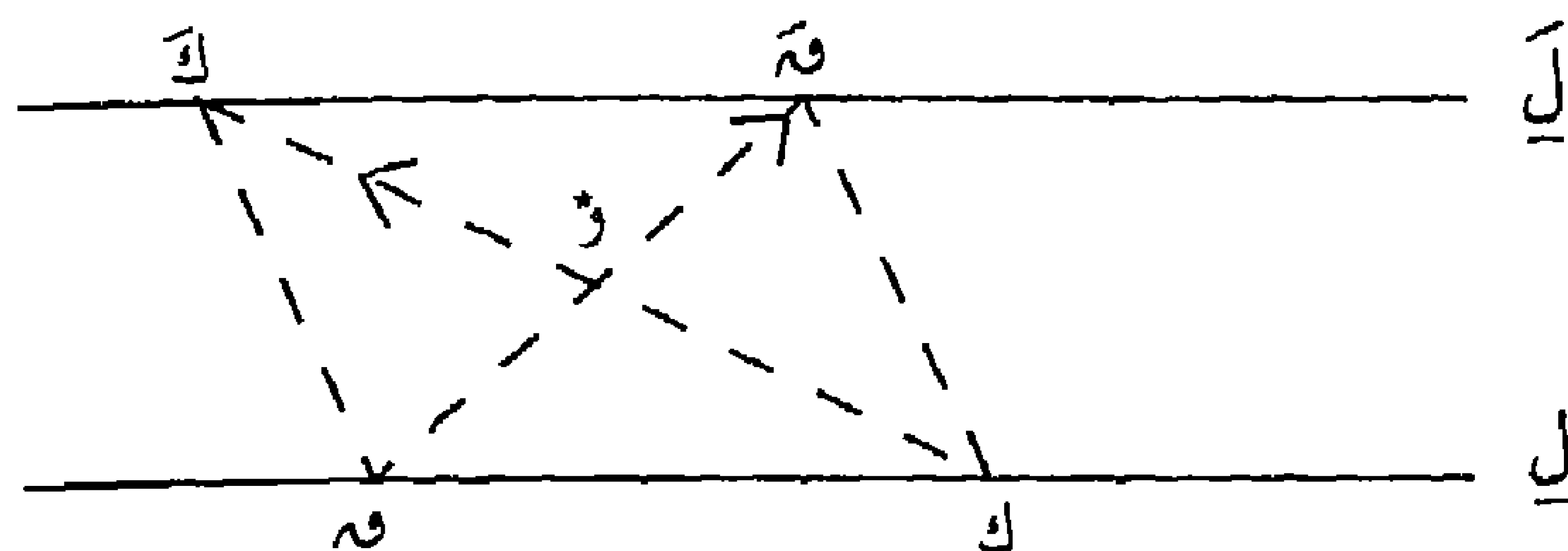
ص - ٠ = -١ (س + ١)

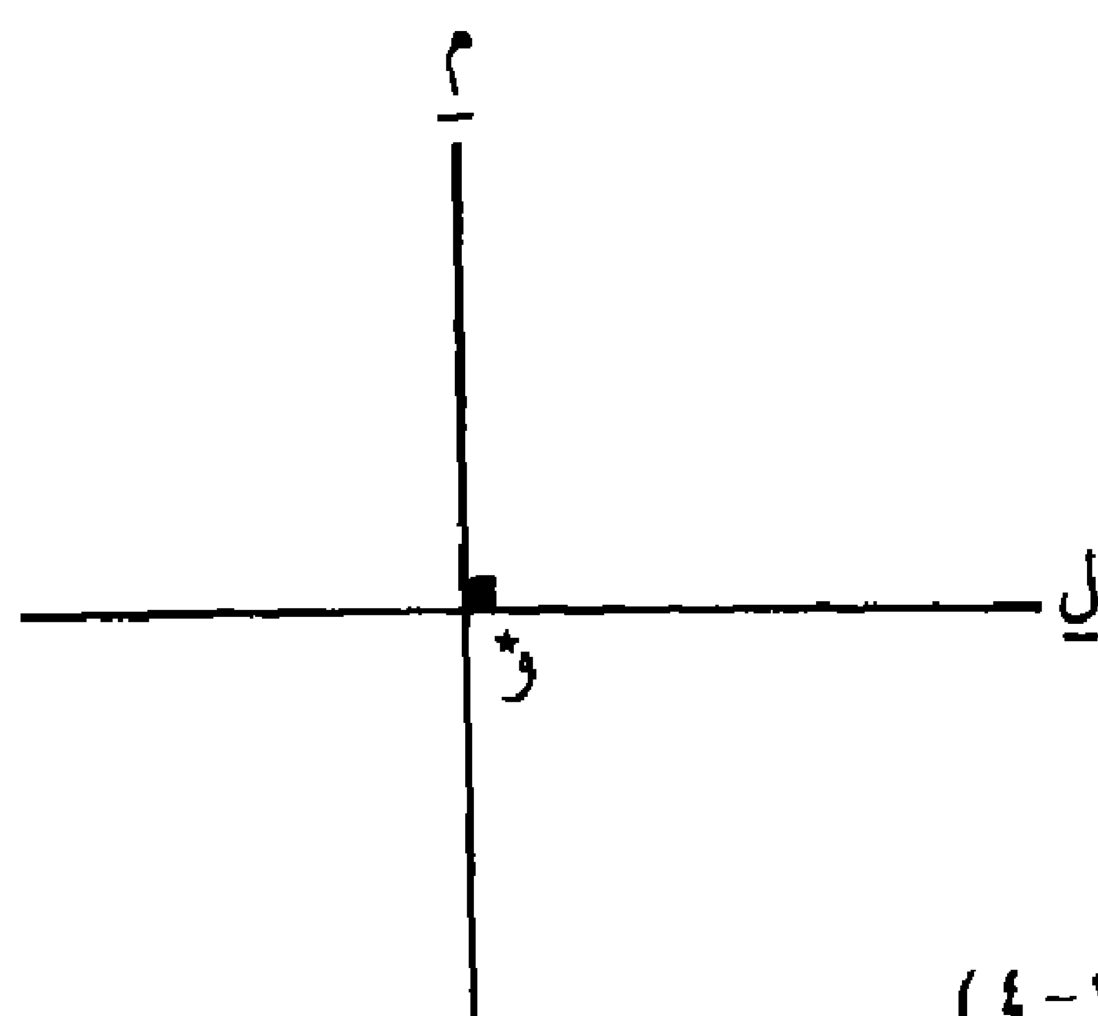
أو م = {(س،ص) : ص + س + ١ + ٠}

نظريه (٣) : ليكن $س_{و^*}$ أى نصف دوره ، ل أى خط ، ل = $س_{و^*}$ (ل).

اذا كانت و* ∈ ل فان ل = ل ، واذا كانت و* ∉ ل فان ل // ل.

البرهان :





شكل (٣-٤)

أولا، لنفرض أن و* ∌ ل ؛ ق،ك ∈ ل ؛ ق′ = $ر_{و*}$ (ق) ؛ ك′ = $ر_{و*}$ (ك)؛ ل′ = $ر_{و*}$ (ل).

بما أن الخط ل′ يحتوى على ق′،ك′ ، فان ل′ = $\overleftrightarrow{\text{ق′ك′}}$. لكن ق ك ق′ ك′ متوازى أضلاع لأن

$$\overline{\text{ق ق′}} \cap \overline{\text{ك ك′}} = \text{و*}$$

ومن ثم يكون $\overleftrightarrow{\text{ق′ك′}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ق ك}}$ ، أى أن ل′ // ل

ثانيا ، لنفرض و* ∈ ل . اذا كان م ⊥ ل ، م ∩ ل = و ، فان

$$ر_{و*} = ر_{م} \circ ر_{ل}$$

وبالتالى :

$$ل′ = ر_{و*} (ل) = (ر_{م} \circ ر_{ل})(ل)$$

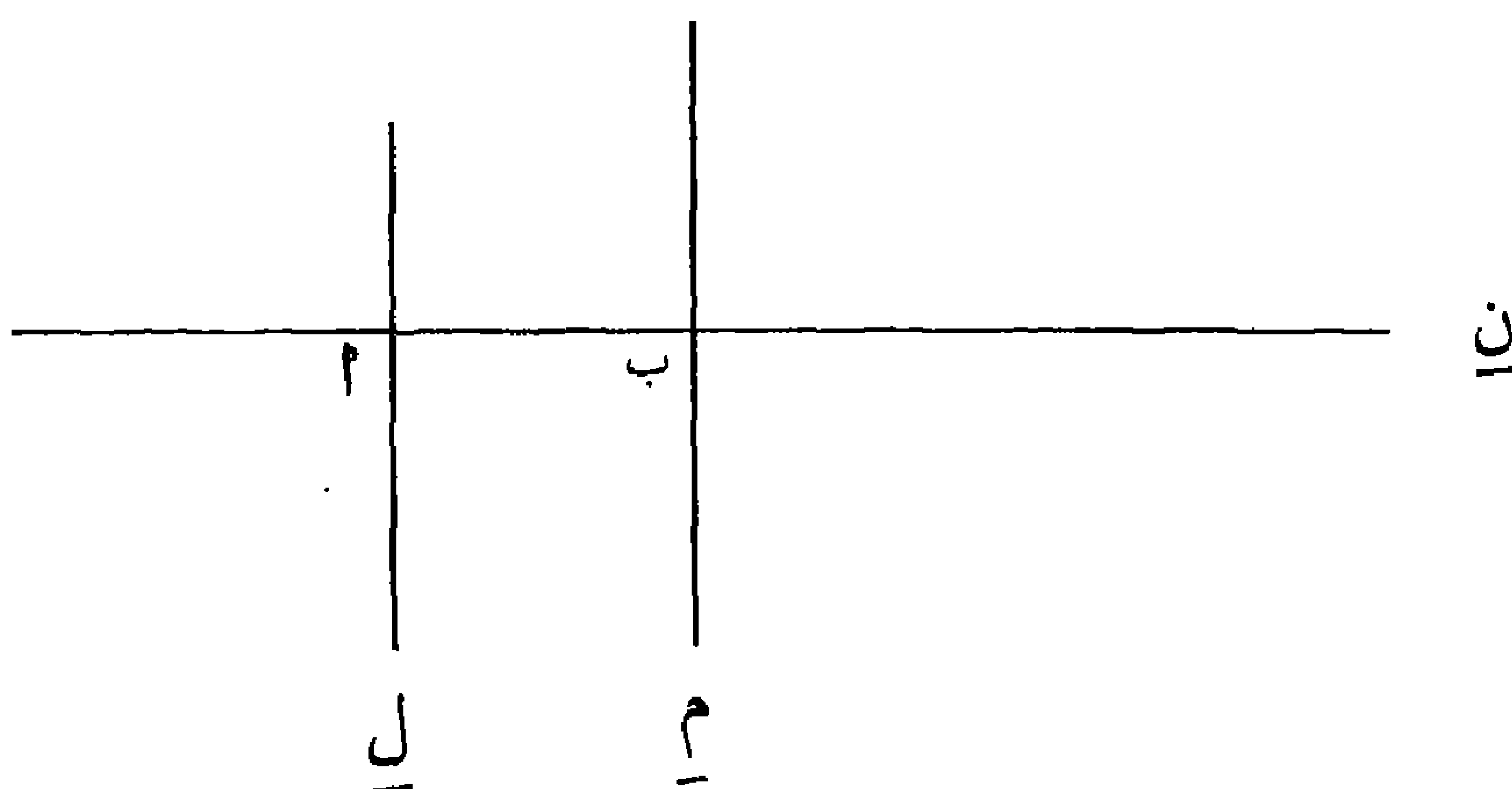
$= ر_{\underline{م}}(ر_{\underline{ل}}(\underline{ل})) = ر_{\underline{م}}(\underline{ل})$

بما أن $\underline{م} \perp \underline{ل}$ ، $ر_{\underline{م}}(\underline{ل}) = \underline{ل}$ ؛ فان $\underline{ل'} = \underline{ل}$.

نظريه (٤) : إذا كانت أ ≠ ب ، جـ أى نقطه ، فان

$$(ر_{أ} \circ ر_{ب})(ج) \neq ج$$

البرهان :



شكل (٣-٥)

نفرض أن $\underline{ن} = \overleftrightarrow{أب}$ ، $\underline{ل} \perp \underline{ن}$ عند النقطه أ ، $\underline{م} \perp \underline{ن}$ عند النقطه ب

باستخدام نظريه (١) :

$$ر_{أ} = ر_{\underline{ل}} \circ ر_{\underline{ن}} \quad ; \quad ر_{ب} = ر_{\underline{ن}} \circ ر_{\underline{م}}$$

اذن :

$$ر_{أ} \circ ر_{ب} = (ر_{\underline{ل}} \circ ر_{\underline{ن}}) \circ (ر_{\underline{ن}} \circ ر_{\underline{م}})$$

$$= ((ر_{\underline{ل}} \circ ر_{\underline{ن}}) \circ ر_{\underline{ن}}) \circ ر_{\underline{م}}$$

$$= (ر_{\underline{ل}} \circ (ر_{\underline{ن}} \circ ر_{\underline{ن}})) \circ ر_{\underline{م}}$$

= (سال ∘ I) ∘ سام

= سال ∘ سام

لنفرض أن (ساأ ∘ ساب) (ج) = ج

اذن :

(سال ∘ سام) (ج) = (ساأ ∘ ساح) (ج) = ج

وبالتالى :

سال ((سال ∘ سام) (ج)) = سال (ج) (i)

لكن

سال ∘ (سال ∘ سام) = (سال ∘ سال) ∘ سام

= I ∘ سام = سام

اذن

(سال ∘ (سال ∘ سام) (ج) = سام (ج) (ii)

من (i) ، (ii) ينتج أن :

سام (ج) = سال (ج)

الآن ، لنأخذ ح* = سام (ج) = سال (ج)

اذا كانت ج* ≠ ج ، فان ل = م . لكن ل ، م خطوط مختلفه لأنها عموديه على ن عند نقط مختلفه أ ، ب على الترتيب . بهذا نكون قد وصلنا الى تعارض .

اذا كانت ج* = ج ، فان سال (ج) = ج ، سام (ج) = ج . وهذا يؤدى الى أن

ج ∈ ل ، ج ∈ م ⇐ ج ∈ ل ∩ م

بهذا نكون قد وصلنا الى تعارض مره آخرى .

مما سبق يتضح لنا أن (ساأ ∘ ساب) (ج) = ج فرض خاطىء . لهذا فان

(ساأ ∘ ساب) (ج) ≠ ج

نتيجه (٣): اذا كانت أ ، ب نقط معطاه ، فانه توجد نصف دوره واحده وفقط واحده ترسل أ فوق ب .

البرهان:

نفرض أن

$$\text{ر}_{\text{د}}(\text{أ}) = \text{ب} \quad ، \quad \text{ر}_{\text{هـ}}(\text{أ}) = \text{ب}$$

حيث كل من $\text{ر}_{\text{د}}$ ، $\text{ر}_{\text{هـ}}$ راسمى نصف دوره .

اذن :

$$\text{ر}_{\text{د}}(\text{أ}) = \text{ر}_{\text{هـ}}(\text{أ}) \quad ،$$

$$\text{ر}_{\text{د}}^{-1} \circ \text{ر}_{\text{د}} = \text{ر}_{\text{د}}^{-1} \circ \text{ر}_{\text{د}}$$

أى :

$$\text{ر}_{\text{د}}^{-1}(\text{ر}_{\text{د}}(\text{أ})) = \text{ر}_{\text{د}}^{-1}(\text{ر}_{\text{هـ}}(\text{أ}))$$

اذن :

$$\text{أ} = \text{ر}_{\text{د}}(\text{ر}_{\text{هـ}}(\text{أ})) = (\text{ر}_{\text{د}} \circ \text{ر}_{\text{هـ}})(\text{أ})$$

من نظريه (٤) : اذا كانت د ، هـ نقط مختلفه ، فان $\text{ر}_{\text{د}} \circ \text{ر}_{\text{هـ}}$ ليس له نقطه ثابته .

نتيجه ذلك هو أن د = هـ وبالتالى فانه توجد على الأكثر نصف دوره ترسل أ فوق ب.

علاوه على ذلك ، اذا كانت **ق** منتصف أب ، فانه يتضح أن $\text{ر}_{\text{ق}}(\text{أ}) = \text{ب}$.

نظريه (٥) : اذا كانت ر تحويله مستويه ،ع مجموعه ما من النقط ، أ نقطه معطاه ، فان

$$\text{أ} \in \text{ر}(\text{ع}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{ر}^{-1}(\text{أ}) \in \text{ع} .$$

البرهان :

اذا كانت $\text{أ} \in \text{ر}(\text{ع})$ ، فانه توجد نقطه $\text{ب} \in \text{ع}$ بحيث أن ر (ب) = أ. بما أن ر تحويله مستويه ، فان

$$(\text{ر}^{-1} \circ \text{ر})(\text{ب}) = \text{ب} = \text{ر}^{-1}(\text{ر}(\text{ب})) = \text{ر}^{-1}(\text{أ})$$

لكن

$$(ر^{-1} \circ ر)(ب) = I(ب) = ب$$

اذن

$$ب = ر^{-1}(أ)$$

وحيث أن ب $\in$ ع ، فان $ر^{-1}(أ) \in ع$.

عكسياً ، اذا كان $ر^{-1}(أ) \in ع$ ، فانه ينتج من تعريف ر(ع) أن :

$$ر(ر^{-1}(أ)) \in ر(ع) .$$

لكن

$$ر(ر^{-1}(أ)) = أ$$

اذن

$$أ \in ر(ع)$$

مثال (٣) : لتكن ع = {(س، ص) : $س^{٢} + ٤ص^{٢} = ١٦$ } ؛

أ (٤ ، -٣) ، ج (٣ ، ١) ، لِ محوراً للسينات .

١- هل $أ \in (ر_{ل} \circ ر_{ج})(ع)$ ؟

٢- أوجد صورة ع تحت تأثير التحويله $ر_{ل} \circ ر_{ج}$

الحل :

لاحظ أن :

$$\therefore (ر_{ل} \circ ر_{ج})^{-1} = ر_{ج}^{-1} \circ ر_{ل}^{-1} = ر_{ج} \circ ر_{ل} ،$$

$$ر_{ل}(ق) = ر_{ل}(س،ص) = (س ، -ص) \quad \forall \; ق(س ، ص) \in ح^{٢} .$$

ر$_ج$ (ق) = ر$_ج$ (س ، ص) = (٦ - س،٢ - ص)

وبالتالى

(ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)$^{-1}$ (ق) = (ر$_ج$ ∘ ر$_ي$)(ق)

= ر$_ج$ (ر$_ي$ (ق))

= ر$_ج$ (س ، −ص)

= (٦−س ، ٢ + ص)   ∀ ق (س ، ص) ∈ ح^2 .

ومن ثم يكون (ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)$^{-1}$ (أ) = (٦ - ٤ ، ٢ - ٣) = (٢،−١)

ولكن

(٢)^2 + ٤ (−١)^2 ≠ ١٦

اذن   (ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)$^{-1}$ (أ) ∉ ع .

وباستخدام نظريه (٥) ينتج أن :

أ ∉ (ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)(ع)

٢- اعتمادا على الجزء الأول من هذا المثال ، يمكننا القول بأن :

∀ ق (س،ص) ؛ ق ∈ (ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)(ع) ⇔ (ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)$^{-1}$ ∈ ع

لكن

(ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)$^{-1}$ (ق) = (٦− س ، ٢+ ص)

اذن

(ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)$^{-1}$ (ق) ∈ ع ⇔ (٦− س،٢+ص) ∈ {(س،ص) : س^2+٤ص^2=١٦}

وهذا يكون صحيحا اذا واذا فقط

(٦ − س)^2 + ٤(٢ + ص)^2 =١٦

اذن

ق(س،ص) ∈ (ر$_ي$ ∘ ر$_ج$)(ع) ⇔ ق(س،ص) ∈ {(س،ص):(٦−س)^2+٤(٢+ص)^2=١٦}

أى أن

س^٢+٤ص^٢-١٢س+١٦ص+٣٦= ٠

هى صورةع تحت تأثير التحويله (ر$_ل$ ∘ ر$_ح$)

*حل آخر للحاله (٢) :

المطلوب ايجاد عَ = (ر$_ل$ ∘ ر$_ح$)(ع)

(٤حتاθ ، ٢حاθ) ∈ع

اذن

(ر$_ل$ ∘ ر$_ح$) (٤حتاθ ،٢حاθ) =ر$_ل$ (ر$_ح$ (٤حتاθ ،٢حاθ))

= ر$_ل$ (٦-٤حتاθ ، ٢-٢حاθ)

=(٦-٤حتاθ ، ٢حاθ-٢) = (سَ،صَ)

وبالتالى يكون :

سَ=٦ - ٤ حتا θ ، صَ = ٢حاθ - ٢

أى:

حتاθ = $\frac{١}{٤}$ (٦- سَ) ، حا θ = $\frac{١}{٢}$ (صَ + ٢)

بالتربيع والجمع لحذف البارامتر θ نحصل على :

$\frac{١}{١٦}$ (٦ - سَ)^٢ + $\frac{١}{٤}$ (صَ + ٢)^٢ = ١

أى

سَ^{٢} + ٤صَ^{٢} - ١٢سَ +١٦صَ + ٣٦ = ٠

أى أن :

عَ = {(سَ،صَ) : سَ^{٢} + ٤صَ^{٢} - ١٢ سَ + ١٦صَ + ٣٦ = ٠ } .

٣-٣ : خواص الدوران

حتى نتعرف على خواص الدوران ، فاننا سنقدم بعض النظريات الهامه التاليه :

نظريه (٦) : ليكن ل ∩ م = و ، ل غير عمودى على م . اذا كانت ق' ، ك نقط مختلفه عن و ،

فان :

$\measuredangle$ ق' و ق = $\measuredangle$ ك و ك'

حيث

ق' = (س$_{ل}$ ∘ س$_{م}$)(ق) ، ك' = (س$_{م}$ ∘ س$_{ل}$) (ك)

البرهان :

لنختار ف ∈ ل ومختلفه عن و وسنبرهن أن

لأى نقطه ق ≠ و تكون

$\measuredangle$ ق' و ق = $\measuredangle$ ف و ف'

حيث ف' = (س$_{م}$ ∘ س$_{ل}$) (ف)

أولا ، لنفرض أن : ق ∈ ل (شكل (٣-٦)(أ)) . نلاحظ أن

و' = (س$_{م}$ ∘ س$_{ل}$) (و) = و

بما أن (س$_{ل}$ ∘ س$_{م}$) تساوى قياسى ، فان ق' ، ف' ، وتكون نقط واقعه على الخط واحد مـــار بالنقطه و . لهذا فان

$\measuredangle$ ق' و ق = $\measuredangle$ ف' و ف

والآن ، لنفرض أن ق ∉ ل

بما أن التساوى القياسى يحفظ مقياس الزوايا ، فان

$\measuredangle$ ق' و ف' = $\measuredangle$ ق و ف

علاوه على ذلك يكون لكل من الثلاثى (و ق' ف') والثلاثى (و ق ف) نفـــس التوجيـــه ، لأن حاصل انعكاسين هو تساوى قياسى مباشر .

اذا كانت ق كما بشكل (٣-٦)(ب) ، فنلاحظ أن

$\measuredangle$ ق' و ق = $\measuredangle$ ق' و ف' + $\measuredangle$ ف' و ق ،

∡ ف و فَ = ∡ ف و قَ + ∡ قَ و فَ

ومنها ينتج أن :

∡ ق و قَ = ∡ ف و فَ

بالتالي ، فانه لأى نقطه ق ≠ و يكون

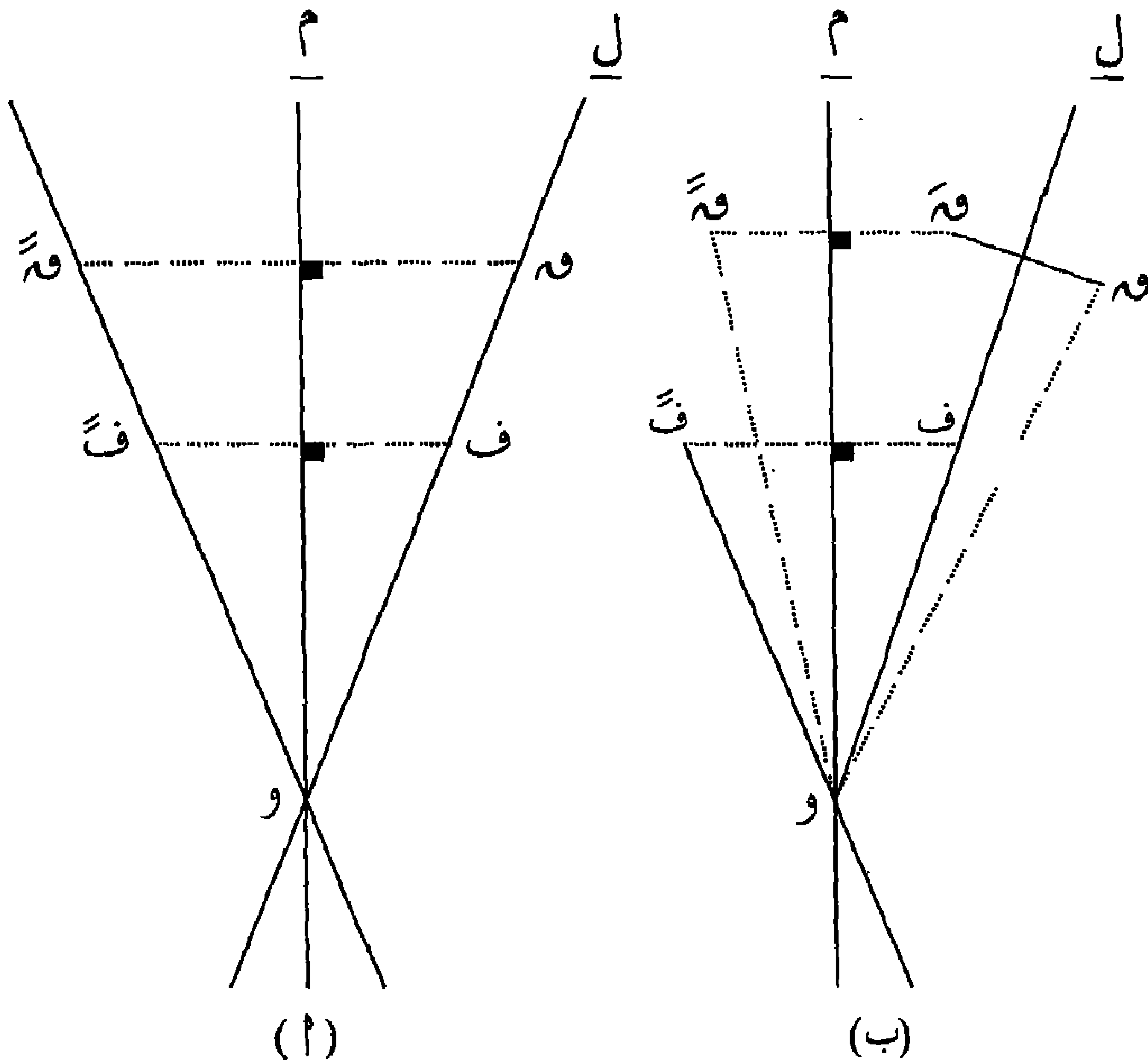
∡ ق و قَ = ∡ ف و فَ

بالمثل ، فانه لأى نقطه ك ≠ و يكون

∡ ك و كَ = ∡ ف و فَ

اذن

∡ ك و كَ = ∡ ق و قَ



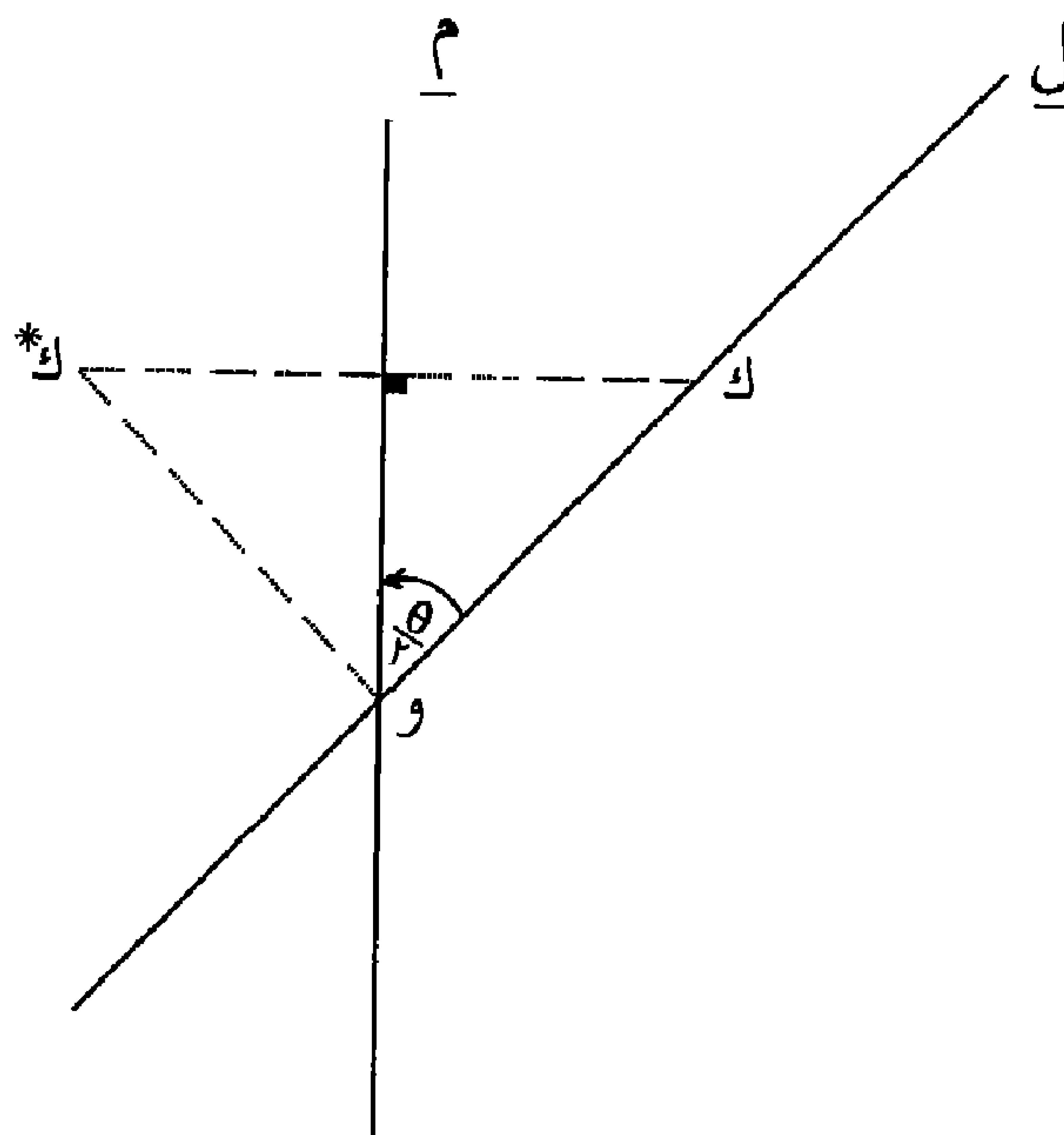
شكل (٣-٦)

*نظريه (٧) : إذا كان ل $\cap$ م = و ، ل غير عمودى على م ، مقيـــاس الزاويـــه مـــن ل الى م

يساوى ، فان

$$ر_{و،()} = ر_م \circ ر_ل$$

البرهان :



شكل (٣-٧)

لنفرض أن ق $\neq$ و ، ولنختار ك $\neq$ و

اذا كانت ك* = ($ر_م \circ ر_ل$) (ك) ؛ فان م يكون منصفاً للزاويه $\angle$ ك و ك* .

لكن مقياس الزاويه من ل الى م يساوى $\frac{\theta}{٢}$

اذن :

$$\angle ك و ك^* = ٢(\frac{\theta}{٢}) = \theta$$

الآن ، إذا كانت ق* = ($ر_م \circ ر_ل$) (ق) ، فمن النظريه السابقة

$\angle$ ق و ق* = $\angle$ ك و ك* .

اذن $\angle$ ق و ق* = θ

بما أن و* = (ر$_م$ o ر$_ل$) (و) ، وبما أن (ر$_م$ o ر$_ل$) تساوى قياسى ، فان

ق* و* = ق و وبالتالى فان ق* و = ق و.

اذن

$$ر_{و،\theta} = ر_م \circ ر_ل$$

من هذه النظريه نستخلص أن : الدوران يكون مكافئاً لتحصيل انعكاســين بالنســبة لأى مستقيمين يمران بالنقطه و (بشرط عدم تعامدهما) ويحصران بينهما زاويه مقياسها يساوى نصــف مقياس الدوران (اتجاه الدوران من ل الى م)

نتيجه (٤) : الدوران هو تساوى قياسى مباشر .

فى شكل (٣-٨) نلاحظ أن

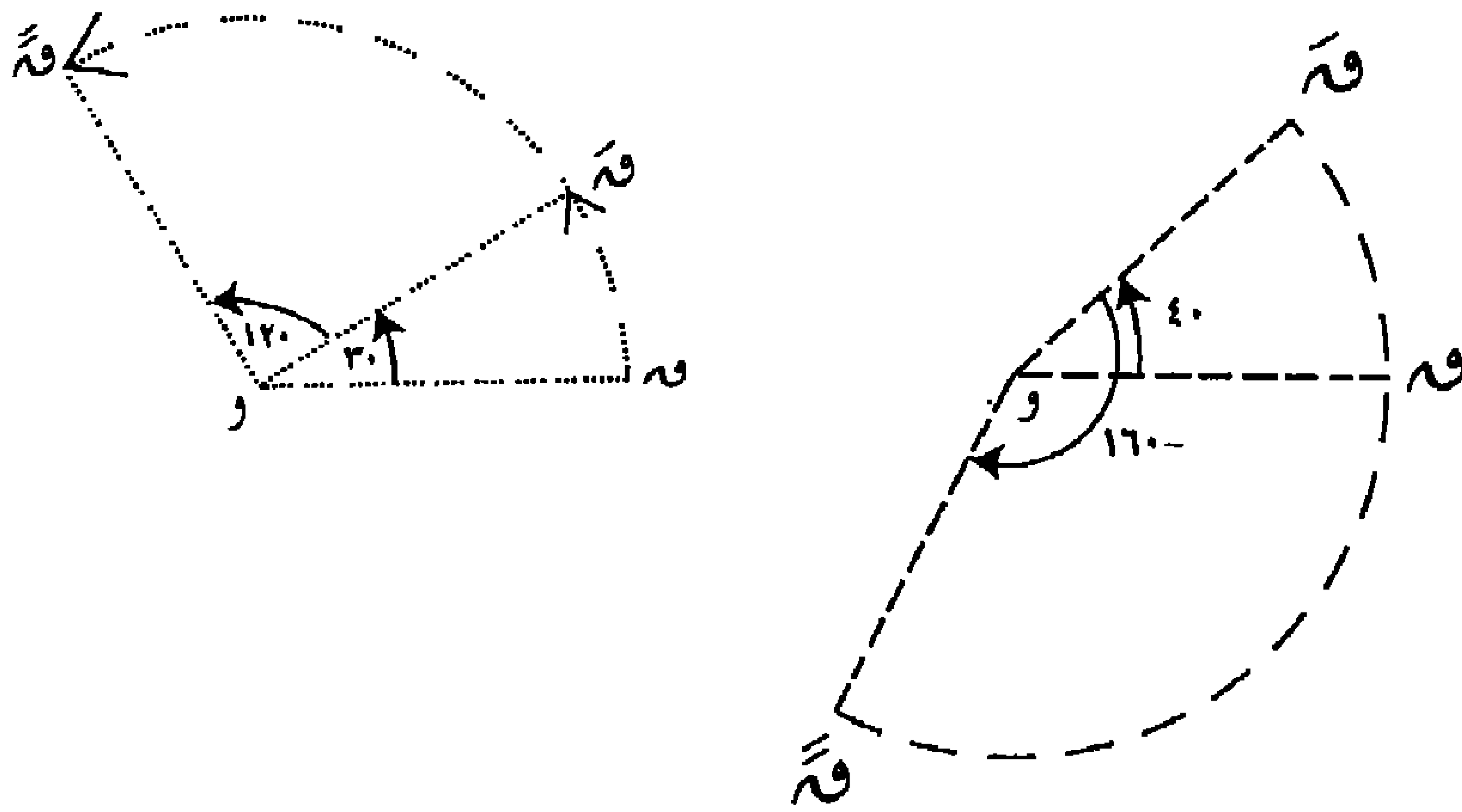
$$ر_{و،١٢٠} \circ ر_{و،٣٠} = ر_{و،١٥٠}$$

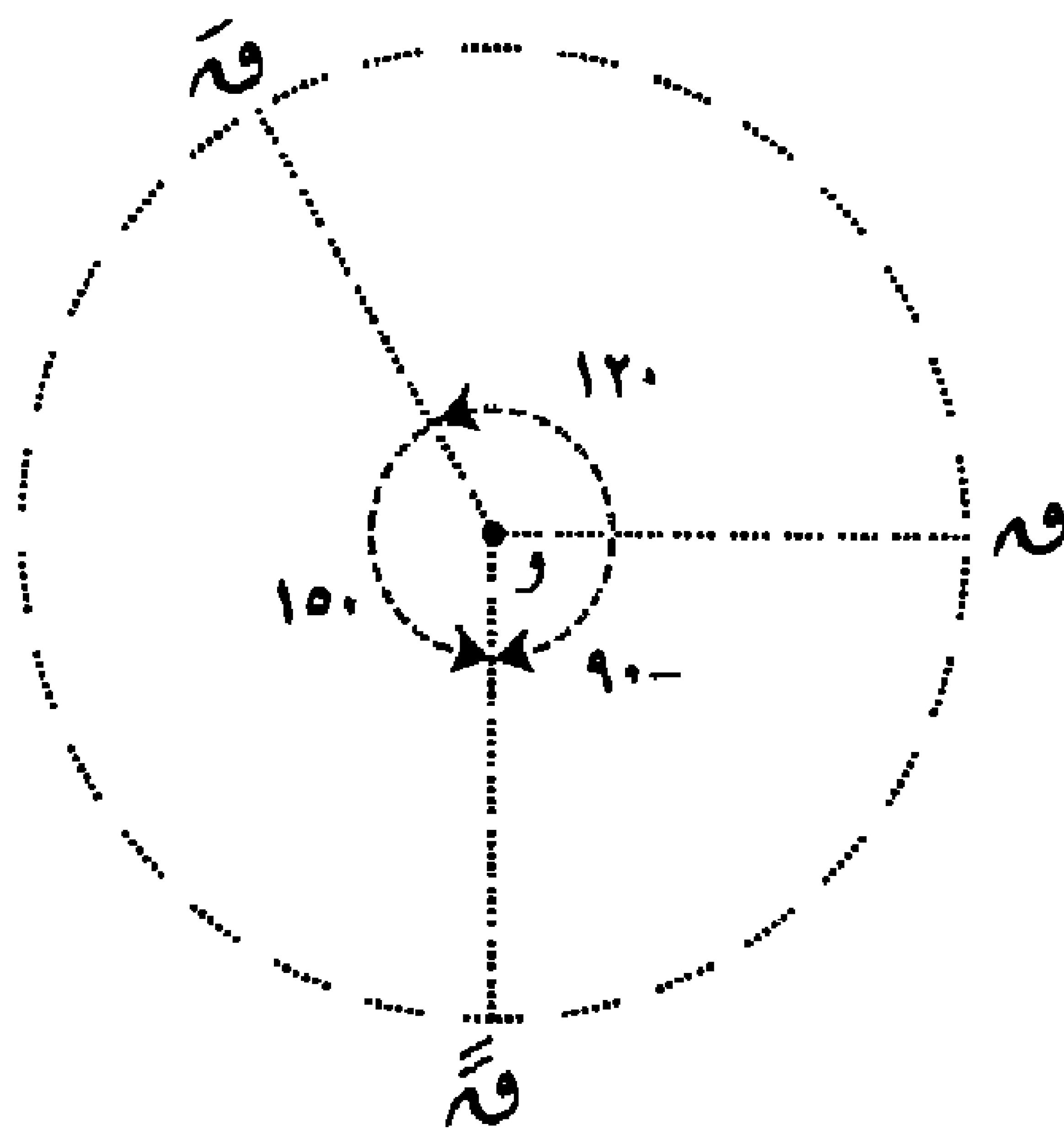
$$ر_{و،-١٦٠} \circ ر_{و،٤٠} = ر_{و،-١٢٠}$$

$$ر_{و،١٥٠} \circ ر_{و،١٢٠} = ر_{و،-٩٠}$$

والآن : اذا كانت ع = { ر$_{و،\theta}$: θ ∈ [-١٨٠ ، +١٨٠] } ، فــان النظــام (ع ،o) يؤلف زمره ، لأنه على سبيل المثال :

١- ر$_{و،٢٠}$ o ر$_{و،٣٠}$ = ر$_{و،٥٠}$ (خاصية الانغلاق)





شكل (٣-٨)

٢- ($ر_{و،٢٠}$ $\circ$ $ر_{و،٣٠}$) $\circ$ $ر_{و،١٠}$ = $ر_{و،٢٠}$ $\circ$ ($ر_{و،٣٠}$ $\circ$ $ر_{و،١٠}$) = $ر_{و،٦٠}$

(خاصية الدمج)

٣- يوجد راسم الوحده $I = \text{ر}_{\text{و},0}$ ، لأن

$\text{ر}_{\text{و},\theta} \circ \text{ر}_{\text{و},0} = \text{ر}_{\text{و},0} \circ \text{ر}_{\text{و},\theta} = \text{ر}_{\text{و},\theta}$ ، $\forall\ \text{ر}_{\text{و},\theta} \in \text{ع}$.

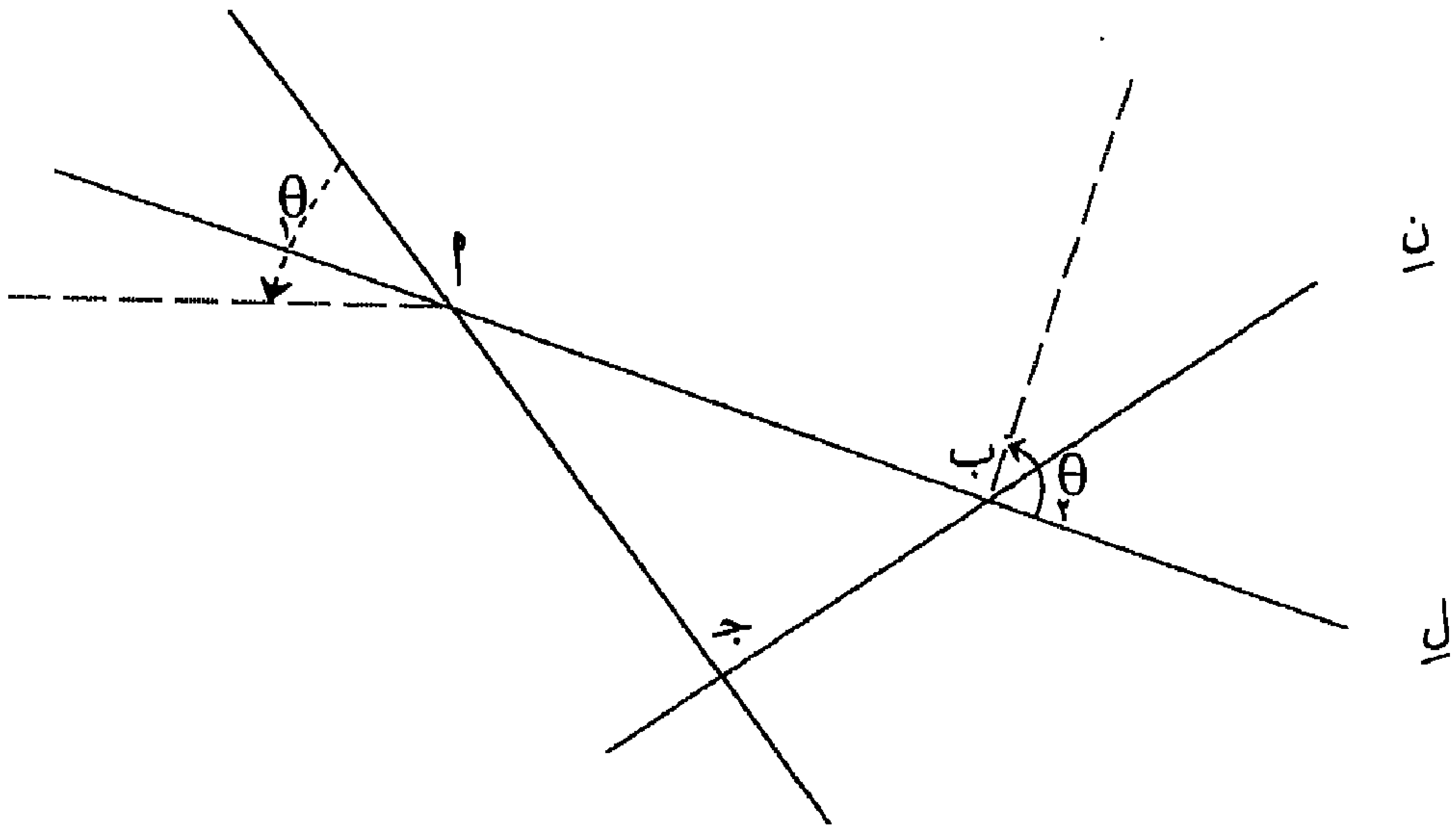
(خاصية العنصر المحايد)

٤- لكل $\text{ر}_{\text{و},\theta} \in \text{ع}$ ، يوجد $\text{ر}_{\text{و},-\theta}$ بحيث أن

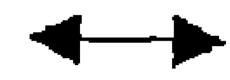
$\text{ر}_{\text{و},\theta} \circ \text{ر}_{\text{و},-\theta} = \text{ر}_{\text{و},0} = I$ (خاصية المعكوس)

وعلى سبيل المثال ، فان $\text{ر}_{\text{و},-60}$ هو معكوس $\text{ر}_{\text{و},60}$.

فيما يلى سندرس تحصيل الدورانين $\text{ر}_{\text{أ},\theta_1}$ ، $\text{ر}_{\text{ب},\theta_2}$ حيث أ $\neq$ ب .



شكل (٣-٩)



لنفرض أن ل = أ ب . اذن توجد الخطوط ن، م بحيث أن

$$\text{س}_{\text{أ},\theta_1} = \text{س}_{\text{ل}} \circ \text{س}_{\text{م}} \quad ، \quad \text{س}_{\text{ب},\theta_2} = \text{س}_{\text{ن}} \circ \text{س}_{\text{ل}}$$

بالتالى

$$\text{س}_{\text{ب},\theta_2} \circ \text{س}_{\text{أ},\theta_1} = (\text{س}_{\text{ن}} \circ \text{س}_{\text{ل}}) \circ (\text{س}_{\text{ل}} \circ \text{س}_{\text{م}})$$

$$= ((\text{س}_{\text{ن}} \circ \text{س}_{\text{ل}}) \circ \text{س}_{\text{ل}}) \circ \text{س}_{\text{م}}$$

$$= (\text{س}_{\text{ن}} \circ (\text{س}_{\text{ل}} \circ \text{س}_{\text{ل}})) \circ \text{س}_{\text{م}}$$

$$= ((\text{س}_{\text{ن}} \circ I) \circ \text{س}_{\text{م}} = \text{س}_{\text{ن}} \circ \text{س}_{\text{م}}$$

فاذا كان ن // م فان $\text{س}_{\text{ب},\theta_2} \circ \text{س}_{\text{أ},\theta_1}$ هو إنتقال (انظر الباب الرابع) . خلافاً لذلك فان

ن ∩ م = ج ، وبالتالى فان $\text{س}_{\text{ب},\theta_2} \circ \text{س}_{\text{أ},\theta_1}$ هو دوران حول ج حسب نظرية (٧)

نظرية (٨) : تحصيل دورانين إما أن يكون دوران أو إنتقال .

*ملاحظه (١) : ليكن $\text{س}_{\text{ب},\theta_2} \circ \text{س}_{\text{أ},\theta_1} = \text{س}_{\text{ح},\theta}$.

١ - اذا كان $٠ < |\theta_1 + \theta_2| \leq ١٨٠$ ، فان $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

٢- اذا كان $\theta_1 + \theta_2 > ١٨٠$ ، فان $\theta = (\theta_1 + \theta_2) - ٣٦٠$

٣- اذا كان $\theta_1 + \theta_2 < -١٨٠$ ، فان $\theta = (\theta_1 + \theta_2) + ٣٦٠$

٤- اذا كان $\theta_1 + \theta_2 = ٠$ ، فان التحصيل هو إنتقال .

مثال (٤) : أوجد زاويه الدوران للتحصيل $R_{أ، -١٢٠} \circ R_{ب، -١٠٠}$

الحل :

$$-١٢٠ + (-١٠٠) = -٢٢٠$$

بما أن -٢٢٠ < -١٨٠ ، نستخدم الحاله (٣) من الملاحظه السابقه

نحصل على أن θ = -٢٢٠ + ٣٦٠ = ١٤٠

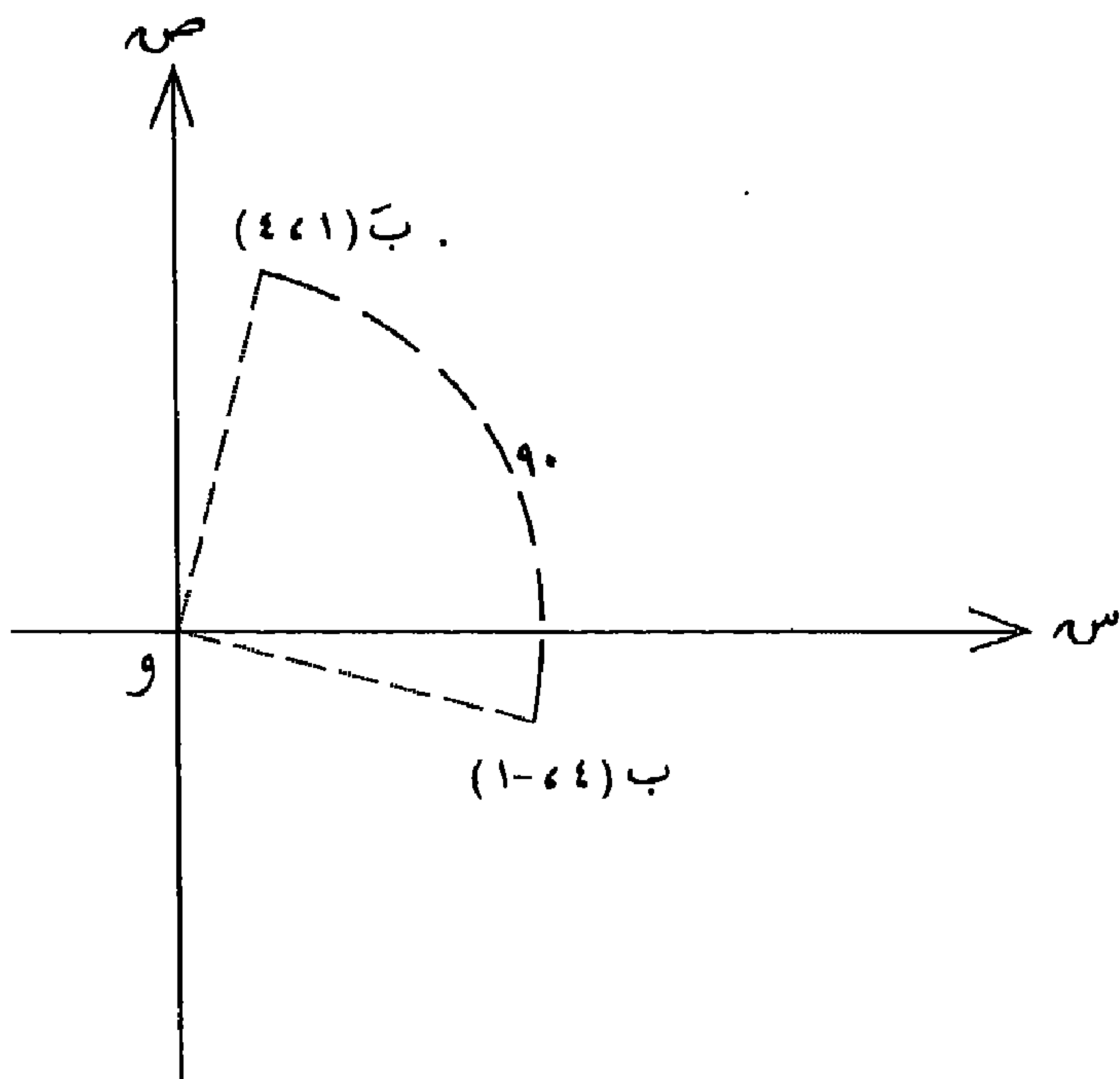
مثال (٥) : اذا كانت ونقطه الأصل ، فعين احداثيات

١- $R_{و، ٩٠}$ (ب) اذا كانت ب (٤، -١)

٢- $R_{و، ٩٠}$ (ق) اذا كانت ق (س ، ص) .

٣-النقطه د اذا كانت $R_{و، ٩٠}$ (د)=(٤،-١)

الحل :



شكل (٣-١٠)

١- $ر_{و،٩٠}$ (٤،-١) = (١،٤)

(من شكل (٣-١٠)).

٢- الدوران $ر_{و،٩٠}$ يمكن اعتباره مكافئاً لتحصيل انعكاسين بالنسبه الى

ل = { (س،ص) : ص = ٠ } أولاً ثم الخط م = {(س،ص) : ص=س}

لكن

$ر_{ل}$ (س،ص) = (س،-ص) ،

$ر_{م}$ (س،ص) = (ص،س)

اذن

$ر_{و،٩٠}$ (س،ص) = ($ر_{م}$ o $ر_{ل}$) (س،ص)

= $ر_{م}$ ($ر_{ل}$ (س،ص))

= $ر_{م}$ (س،-ص) = (-ص، س)

٣- باستخدام الحاله السابقه يمكن الحصول على أن د = (-١،-٤) .

ويجب علينا ملاحظه أن

$$ر^{-١}_{و،\theta} = ر_{و،-\theta}$$

مثال (٦) : أثبت أن

١ -(حتا (ط+θ) ، حا (ط+θ)) = (-حتاθ ، -حاθ)

٢-(حتا ($\frac{ط}{٢}$ -θ) ، حا ($\frac{ط}{٢}$ - θ) = (حاθ ، حتاθ)

الحل :

١- بما أن

$ر_{و،ط}$: θ ← θ + ط

اذن :

ر$_{و ، ط}$: (حتا θ، حا θ) ← (حتا (ط + θ) ، حا (ط + θ)) (i)

لكن :

ر$_{و ، ط}$ (حتا θ، حا θ) = (−حتا θ، −حا θ)

أو

ر$_{و ، ط}$: (حتا θ، حا θ) ← (−حتا θ ، −حا θ) (ii)

من (I) ، (ii) ينتج أن:

(حتا (ط + θ) ، حا (ط + θ)) = (−حتا θ، −حا θ)

٢- نحن نعلم θ ←ر$_{س}$— $-\theta$ ←ر$_{و ، \frac{ط}{٢}}$— $\frac{ط}{٢} - \theta$

أو ر$_{و ، \frac{ط}{٢}}$ ∘ ر$_{س}$: θ ← $\frac{ط}{٢} - \theta$

وبالتالى :

ر$_{و ، \frac{ط}{٢}}$ ∘ ر$_{س}$: (حتا θ، حا θ) ← (حتا ($\frac{ط}{٢} - \theta$) ، حا ($\frac{ط}{٢} - \theta$)) (i)

لكن

(ر$_{و ، \frac{ط}{٢}}$ ∘ ر$_{س}$) (س، ص) = ر$_{و ، \frac{ط}{٢}}$ (ر$_{س}$ (س، ص))

= ر$_{و ، \frac{ط}{٢}}$ (س، −ص) = (ص، س)

أى

ر$_{و ، \frac{ط}{٢}}$ ∘ ر$_{س}$: (حتا θ، حا θ) ← (حا θ ، حتا θ) (ii)

من (i) ، (ii) ينتج أن :

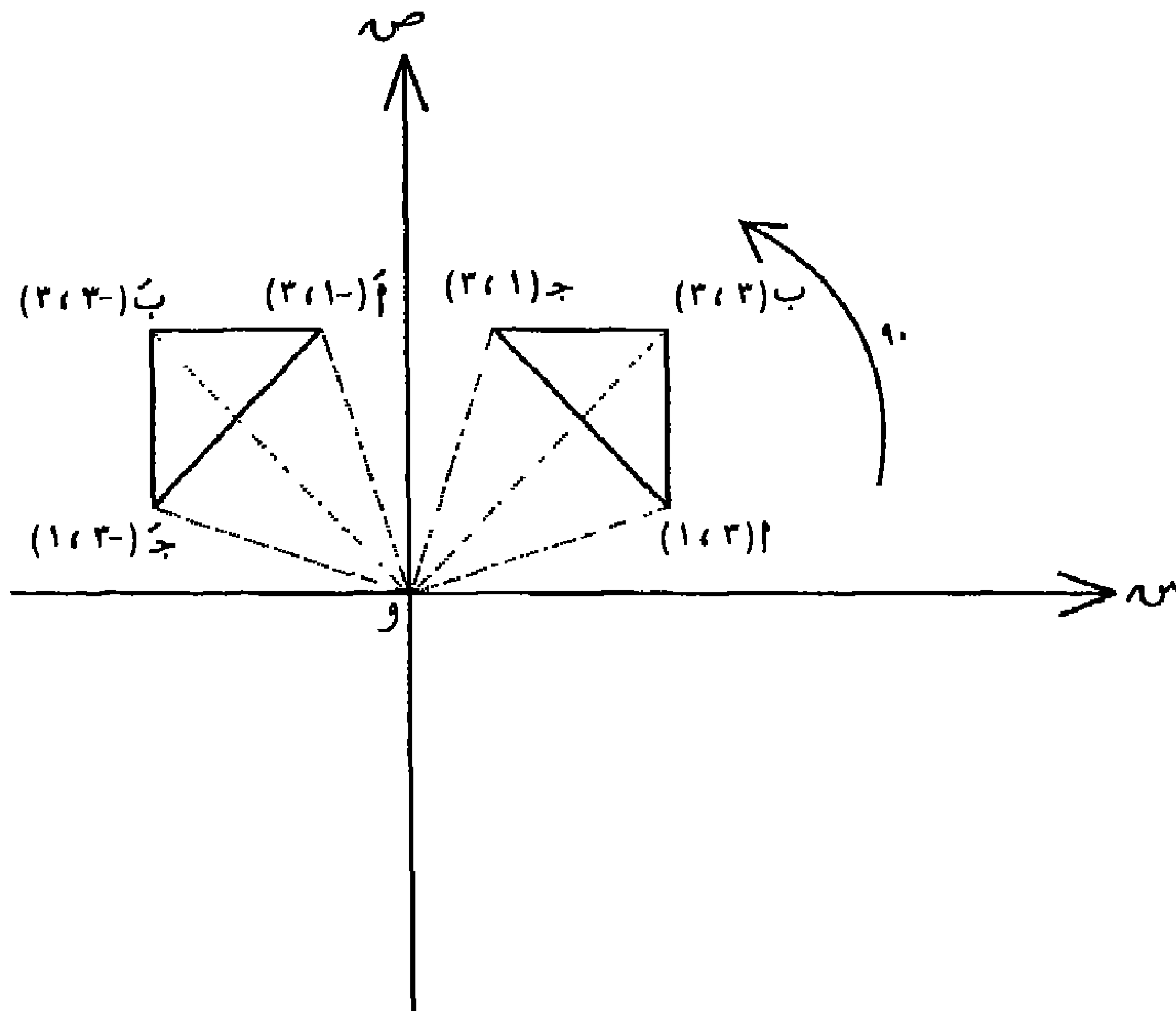
$$(\text{حتا}\ (\frac{ط}{٢} - \theta)\ ،\ \text{حا}\ (\frac{ط}{٢} - \theta)) = (\text{حا}\ \theta\ ،\ \text{حتا}\ \theta)\ .$$

مثال (٧) : أوجد صوره المثلث

$$ع = \{(٣،١) ، (٣،٣) ، (١،٣)\}$$

تحت تأثير الراسم $ر_{و ، ٩٠}$

الحل :



شكل(٣-١١)

من شكل (٣-١١) يتضح أن :

$$ع' = \{(-١،٣)،(-٣،٣)،(-٣،١)\}$$

كذلك :

أ/ب/ = أ ب ، ب/ج/ = ب ج ، ج/أ/ = ج أ

أى أن ر(و ، ٩٠) هو راسم تساوى قياسى.

كذلك :

∠ أ ب ج = ∠ أ/ ب/ ج/ ، ∠ ب ج أ = ∠ ب/ ج/ أ/

∠ ج أ ب = ∠ ج/ أ/ ب/

أى أن ر(و ، ٩٠) يحفظ مقياس الزوايا .

كذلك يتضح لنا من الشكل أن ر(و ، ٩٠) هو تحويله مباشره .

فى نهاية هذا البند نستطيع أن نجمل خواص الدوران كالآتى :

١- الدوران تحويله هندسية (مستويه) .

٢- الدوران تساوى قياسى .

٣- الدوران يحفظ مقياس الزوايا .

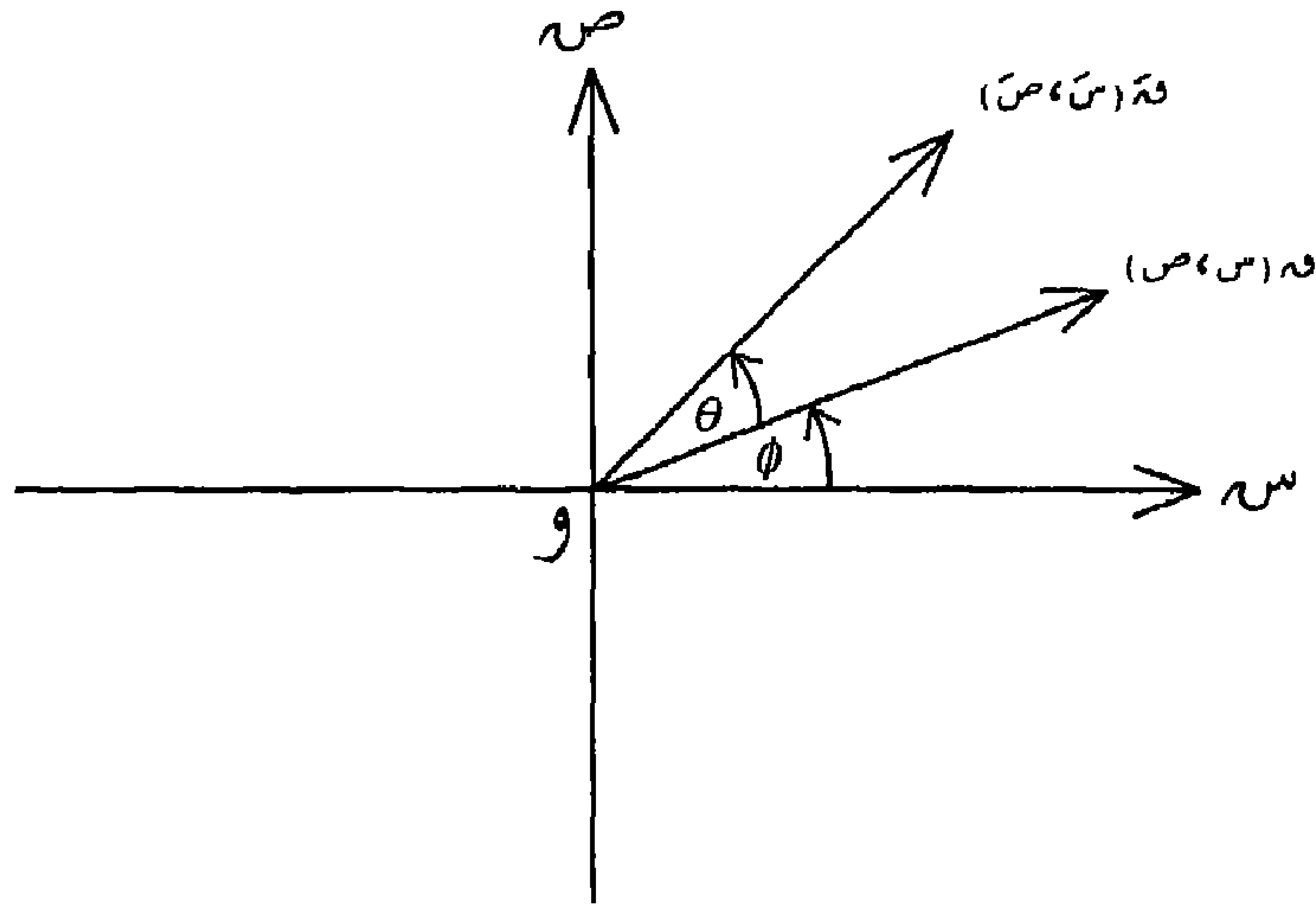
٤- الدوران تحويله مباشرة.

٥- الدوران يحفظ البينيه واستقامه النقط .

٦- مركز الدوران هو النقطه الوحيدة الثابته للراسم ر(و ، ٩٠)

٣-٤ : مصفوفه الدوران

نفرض أن **ق** (س،ص) ∋ح^{2} وأن **قَ** (سَ ، صَ) ∋ح^{2} هى صورتها بدوران زاويته θ حـــول و فى إتجاه مضاد لعقارب الساعه .



شكل (٣-١٢)

الاحداثيات القطبيه للنقطه ق هى (ر حتا ϕ ، ر حا ϕ)

حيث = ‖$\overleftarrow{\text{وق}}$‖ ، ϕ هى الزاويه التى يصنعها $\overleftarrow{\text{وق}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .

الاحداثيات القطبيه للنقطه **قَ** هى (ر حتا ($\phi+\theta$) ، ر حا($\phi+\theta$)) .

حيث ر = ‖$\overleftarrow{\text{وقَ}}$‖ ، ($\phi+\theta$) هى الزاويه التى يصنعها $\overleftarrow{\text{وقَ}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السنيات .

اذن:

سَ = رحتا ($\phi+\theta$)

= ر حتا ϕ حتا θ - رحا ϕ حا θ

= حتا θ س - حا θ ص (i)

(لأن : س = رحتا ϕ ، ص = رحا ϕ)

أيضا:

صَ = ر حا ($\phi+\theta$)

$=$ س حاϕ حتاθ + ر حتاϕحاθ

$=$ حتاθص + حاθ س

$=$حاθ س + حتا θ ص (ii)

من (i) ، (ii) نحصل على التحويله المصفوفيه :

$$\begin{pmatrix} \text{حتا}\theta & -\text{حا}\theta \\ \text{حتا}\theta & \text{حا}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix}$$

المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{حتا}\theta & -\text{حا}\theta \\ \text{حتا}\theta & \text{جتا}\theta \end{pmatrix}$

تسمى **مصفوفه الدوران** .

هذه المصفوفه هى مصفوفه تحويل مناظره لدوران مركزه و ، زاويته θ .
ويلاحظ هنا أن محدد هذه المصفوفه يساوى (+١) .

ملاحظه (٢) :

١- اذا كانت θ = $\frac{\text{ط}}{٢}$ ، فان مصفوفه الدوران هى :

$$\text{ع} = \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

٢- اذا كانت θ = ط ، فان مصفوفه الدوران هى :

$$\text{ن} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$$

٣- اذا كانت θ = $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ ، فان مصفوفه الدوران هى :

$$ل = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٠ \end{pmatrix}$$

٤- اذا كانت θ = ٢ ط ، فان مصفوفه الدوران هى :

$$I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

مثال (٨) : برهن أن حاصل دورانين حول نفس النقطه هو دوران .

الحل:

نفرض أن :

$$ر_{و ، \theta_1} : (س،ص) \longrightarrow (سَ ، صَ)$$

أو

$$\begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta_1 & -\text{جا}\,\theta_1 \\ \text{جا}\,\theta_1 & \text{جتا}\,\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س/ \\ ص/ \end{pmatrix}$$

ونفرض أن :

$$ر_{و ، \theta_2} : (سَ،صَ) \longrightarrow (سً ،صً)$$

أو

$$\begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta_2 & -\text{جا}\,\theta_2 \\ \text{جا}\,\theta_2 & \text{جتا}\,\theta_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} سَ \\ صَ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} سً \\ صً \end{bmatrix} \qquad (ii)$$

لا حظ هنا ، ان كل من الدورانين $ر_{و ، \theta_1}$ ، $ر_{و ، \theta_2}$ فى اتجاه مضاد لعقارب الساعه.

من (i) ، (ii) نحصل على

$$\begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta_2 & -\text{جا}\,\theta_2 \\ \text{جا}\,\theta_2 & \text{جتا}\,\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta_1 & -\text{جا}\,\theta_1 \\ \text{جا}\,\theta_1 & \text{جتا}\,\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{جتا}(\theta_1+\theta_2) & -\text{حا}(\theta_1+\theta_2) \\ \text{حا}(\theta_1+\theta_2) & \text{حتا}(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \qquad (iii)$$

أى :

$$ر_{\text{و}\,،\,\theta_1+\theta_2} : (\text{س}،\text{ص}) \longrightarrow (\ddot{\text{س}} ، \ddot{\text{ص}})$$

وبلغه أخرى ، فاننا نكتب

$$ر_{\text{و}\,،\,\theta_1+\theta_2} = ر_{\text{و}\,،\,\theta_2} \circ ر_{\text{و}\,،\,\theta_1}$$

ملاحظه (٣) : معكوس الدوران بزاويه θ هو دوران بزاويه $(-\theta)$. ففى المثال السابق ،اذا وضعنا $\theta_1 = \theta$ ، $\theta_2 = -\theta$ فى مصفوفه الدوران الوارده فى (iii) ،فاننا نحصل على :

$$\begin{bmatrix} \text{حتا}\,\cdot & -\text{حا}\,\cdot \\ \text{حا}\,\cdot & \text{حتا}\,\cdot \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & \cdot \\ \cdot & ١ \end{pmatrix} = I$$

حيث I هى مصفوفه الوحده وهذا يثبت المطلوب .

مثال (٩) : باستخدام ضرب المصفوفات ، أثبت أن $ر^{2}_{و،\theta} = ر_{و،2\theta}$ علماً بأن الدوران فى اتجاه ضد عقارب الساعه .

الحل :

بوضع $\theta_1 = \theta$ ، $\theta_2 = \theta$ فى (iii) من مثال (٨) نحصل على :

$$\begin{pmatrix} \text{جتا}2\theta & -\text{جا}2\theta \\ \text{جا}2\theta & \text{جتا}2\theta \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفه تمثل مصفوفه دوران .أى أنها مصفوفه تحويل مناظره لدوران مركزه و ، زاويته (2θ) . أى الراسم $ر_{و،2\theta}$

ملاحظه (٤) : تعميقاً للملاحظه (٣) ، اذا كانت

$$\begin{pmatrix} \text{جتا}\,\theta & -\text{جا}\,\theta \\ \text{جا}\,\theta & \text{جتا}\,\theta \end{pmatrix}$$

هى مصفوفه التحويل لدوران مركزه و ، وزاويته (θ) ، أى الراسم $ر_{و،\theta}$.

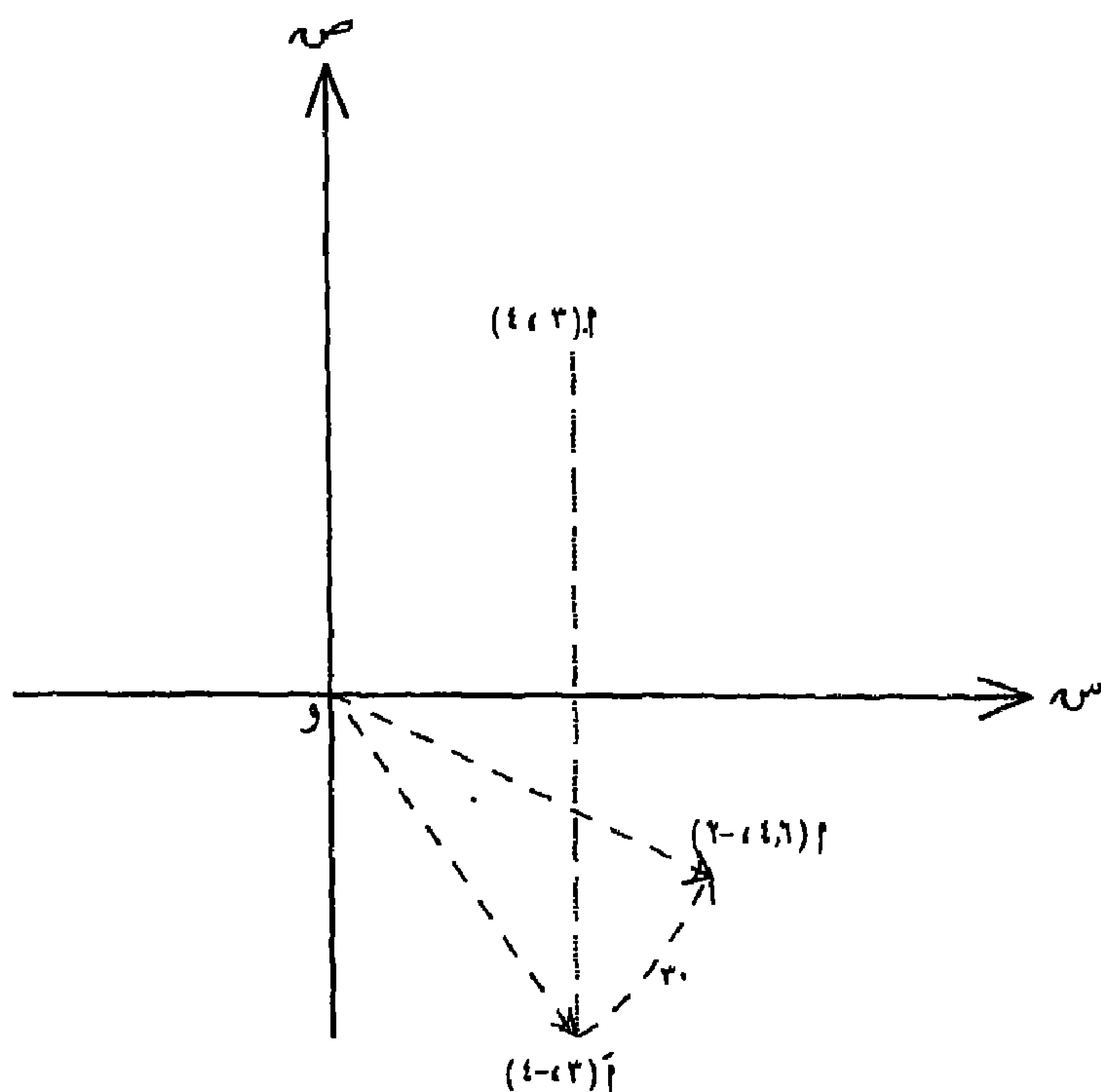
فان

$$\begin{pmatrix} \text{جتا}(-\theta) & -\text{جا}(-\theta) \\ \text{جا}(-\theta) & \text{جتا}(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{جتا}(\theta) & \text{جا}(\theta) \\ -\text{جا}(\theta) & \text{جتا}(\theta) \end{pmatrix}$$

هى مصفوفه التحويل العكسيه لدوران مركزه و ، وزاويته ($-\theta$)، أى الراسم $ر_{و،-\theta}$.

مثال (١٠) : أوجد صوره النقطه أ (٣ ، ٤) بانعكاس فى محور السنيات متبوعاً بدوران مركـــزه نقطه الأصل وزاويته ٣٠ .

الحل :



شكل(٣-١٣)

من الملاحظه (٣) بالباب الثانى ، وجدنا أن مصفوفه الانعكاس بالنسبه الى محور السنيات

هى :

$$ع_١ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$$

أيضاً ، مصفوفه الدوران حول نقطه الأصل بزاويه ٣٠ هى :

$$\text{ع}_{٢} = \begin{pmatrix} \text{حا}٣٠ & -\text{حا}٣٠ \\ \text{حا}٣٠ & \text{حا}٣٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{pmatrix}$$

اذن ، مصفوفه التحويل المطلوبه هى :

$$\text{ع} = \text{ع}_{٢} \cdot \text{ع}_{١}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{pmatrix}$$

وبالتالى :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٣\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٢ \\ \frac{٣}{٢} - ٢\sqrt{٣} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix}$$

اذن

$\text{س}' = ٤,٥٩ = ٤,٦$ ، $\text{ص}' = -١,٩٦ = -٢$

أىأن :

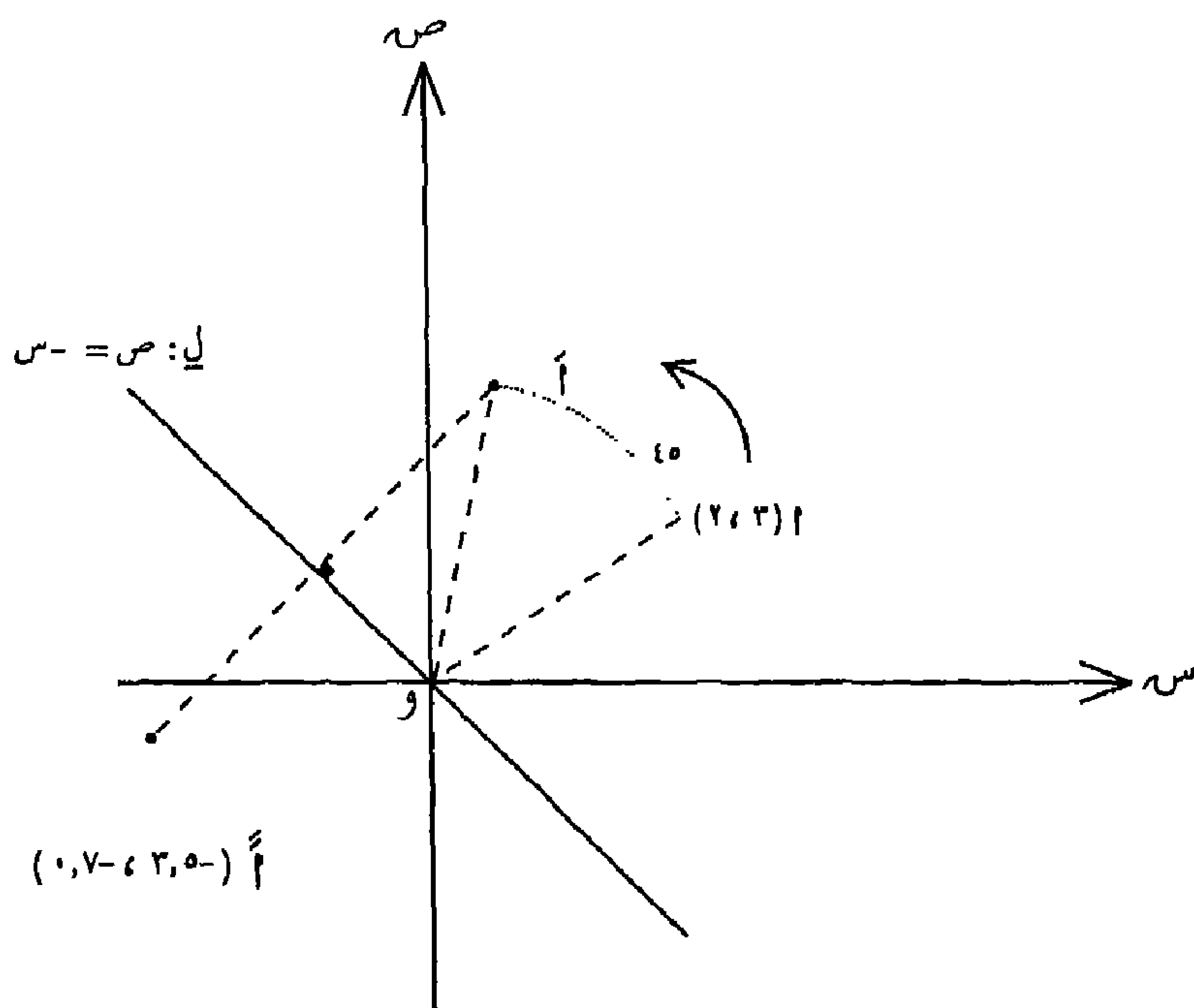
$(٣ ، ٤) \leftarrow (٤,٦ ، -٢)$

وهى نفس النتيجه الموضحه بالرسم فى شكل (٣-١٣).

مثال (١١) : أوجد صوره النقطه أ (٣،٢) بدوران مركزه نقطه الأصل وزاويته ٤٥ متبوعا بانعكاس فى الخط :

ل = { (س ، ص) : ص = − س }

الحل :



شكل (٣ − ١٤)

مصفوفه الدوران حول نقطه الأصل بزاويه ٤٥ هى :

$$ع_١ = \begin{pmatrix} \text{حتا}٤٥ & -\text{حا}٤٥ \\ \text{حا}٤٥ & \text{حتا}٤٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{\sqrt{٢}} & \frac{-١}{\sqrt{٢}} \\ \frac{١}{\sqrt{٢}} & \frac{١}{\sqrt{٢}} \end{pmatrix}$$

مصفوفة الانعكاس بالنسبة إلى الخط ل هى :

$$ع_٢ = \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$$

اذن ، مصفوفه التحويل المطلوبه هى :

$$ع = ع_٢ \cdot ع_١$$

$$= \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{١}{\sqrt{٢}} & -\frac{١}{\sqrt{٢}} \\ \frac{١}{\sqrt{٢}} & \frac{١}{\sqrt{٢}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{\sqrt{٢}} & -\frac{١}{\sqrt{٢}} \\ -\frac{١}{\sqrt{٢}} & \frac{١}{\sqrt{٢}} \end{pmatrix}$$

وبالتالى :

$$\begin{pmatrix} -\frac{١}{\sqrt{٢}} & -\frac{١}{\sqrt{٢}} \\ -\frac{١}{\sqrt{٢}} & \frac{١}{\sqrt{٢}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س'' \\ ص'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{٣}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}} \\ -\frac{٣}{\sqrt{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{٢}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س'' \\ ص'' \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $س'' = -\frac{٥}{\sqrt{٢}} = -٣,٥$ ، $ص'' = -٠,٧$

أى أن :

أ = (٣،٢) ← (-٣,٥ ، -٠,٧) = أ''

انظر الرسم الموضح فى شكل (٣-١٤) .

تمارين عامه

١- ليكن ل = {(س،ص) : ٢س - ٥ص = ٤} ، أ (١،٤)

(أ) هل ح (-١ ، ٦) ∋ ل' = $س_{أ}$ (ل) ؟

(ب) اكتب معادله ل'

٢- ليكن ع = {(س ،ص) : ص = $س^{٢}$} ، أ (٣،١) .

(ب) هل ب (٣ ، -٧) ∋ عَ = $س_{أ}$ (ع) ؟

(ب) اكتب معادله ع .

٣- اذا كـــان ل = {(س،ص) : ص = س} ، م = {(س،ص) : ص = ٣-٢س} ؛ ح(٢،-١) ، فأوجد معادله

(أ) ن = ($س_{ح}$ ∘ $س_{ل}$) (م)

(ب) ع = ($س_{ح}$ ∘ $س_{م}$)(ل)

٤- ليكن ع = {(س،ص) : ص= $\frac{١}{س}$ } ، أ (٢،٠) ، ل هو المحور السيني .

(أ) عند أي قيمه ك تكون جـ (ك، ٦) ∋ ع = ($س_{ل}$ ∘ $س_{أ}$) (ع) ؟

(ب) اكتب معادله ع .

٥- لتكن أ (٠،٠) ، ب (٣،-١)

(أ) اذا كانت جـ (-٢،٤) فعين جـ'' = ($س_{ب}$ ∘ $س_{أ}$) (جـ) .

(ب) اذا كانت ق (س،ص) فعين ق'' = ($س_{ب}$ ∘ $س_{أ}$) (ق)

(ج) قارن الأبعاد حـ حـ″ ، ق ق″ ، أ ب .

٦- (أ) اذا كانت أ ∈ ل ، فبرهن أن $ر_{أ} \circ ر_{ل}$ انعكاس . ثم اوصف محور الانعكاس .

(ب) اذا كان ل ⊥ م عند أ، ل ⊥ ن عند ب ، برهن أن

$ر_{أ} \circ ر_{ن} = ر_{م} \circ ر_{ب}$.

٧- لتكن ع = { (س،ص) : $\frac{س^{2}}{٣٦} + \frac{ص^{2}}{١٦} = ١$ } ؛

أ(-٢،١) ، ب(٣،-٢) ، ل = {(س،ص) : ص = س } .

(أ) أوجد صورة ع تحت تأثير التحويله $ر_{ل} \circ ر_{أ}$.

(ب) أوجد صوره ع تحت تأثير التحويله $ر_{ل} \circ ر_{ح}$.

٨- اذا كانت و (٠،٠) ، أ (١،٠) ، فعين احداثيات .

(أ) $ر_{و،٦٠}$ (أ)   (ب) $ر_{و،٤٥}$ (أ)

(جـ) $ر_{و،١٢٠}$ (أ)   (ء) $ر_{و،-١٣٥}$ (أ) .

٩- ليكن ل = { (س،ص) : س = ٠ } ، م = {(س،ص) : ص = س }، و (٠،٠)

أوجد صوره كل من ب(١،٠) ، ح (٠،٣) ، د (٢،-٢) ، هـ (٤،٢) تحت تأثير

$ر_{م} \circ ر_{ل}$.

(ب) عين إحداثيات ($ر_{م} \circ ر_{ل}$) (ق) ∀ ق (س ، ص) .

(ج) اكتب ($ر_{م} \circ ر_{ل}$) فى صوره تحويله بسيطه .

١٠- عرف دوران حول و(٠،٠) يرسل ب(١،٠) فوق ($-\frac{1}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

١١- اذا كانت و(٠،٠) ، ل = {(س،ص) : ص = ٢س ٣} ، فاكتب

ل' = $ر_{و،٩٠}$ (ل) .

١٢- اذا كانت د دائره نصف قطرها ٢ ومركزها أ ($\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$) واذا كانت ب(٠،٠) فاكتب معادله

د' = $ر_{ب،٤٥}$ (د)

١٣- اذا كان $ر_{ب،\theta_2}$ ∘ $ر_{أ،\theta_1}$ = $ر_{ج،\theta}$ ، فعين θ اذا كانت :

(أ) θ_1 = ٣٠ ، θ_2 = ١٣٥

(ب) θ_1 = −٩٠ ، θ_2 = ١٦٠

(ج) θ_1 = ١٥٠ ، θ_2 = ١٢٠

(د) θ_1 = −١٠٠ ، θ_2 = −١٣٠

١٤- حل كل من المعادلات الآتيه حيث θ ∈ [−١٨٠ ، +١٨٠] .

(أ) $ر_{أ،٣٠}$ ∘ $ر_{ب،\theta}$ = $ر_{ج،٨٠}$

(ب) $ر_{د،١٥٠}$ ∘ $ر_{س،\theta}$ = $ر_{ف،-٦٠}$

(ج) $(ر_{ج،\theta})^٣$ = $ر_{أ،-١٢٠}$

(د) $(ر_{أ،\theta})^٤$ = I

(هـ) $ر_{ب،\theta}$ ∘ $ر_{ج،-٤٠}$ = $ر_{د،١٦٠}$

(و) $ر_{(أ، 60)} \circ ر_{(ب، \theta)} \circ ر_{(ج، -90)} = ر_{(د، 45)}$

١٥- اذا كانت أ(٢،٠) ، و(٠،٠) نقط معطاه ؛ $ر = ر_{أ} \circ ر_{(و، 90)}$

(أ) ماهو نوع الراسم ر ؟

(ب) عين احداثيات جميع النقط **ق** بحيث أن ر(**ق**) = **ق** .

١٦- ليكن $ر = ر_{(أ، 60)} \circ ر_{(ب، -60)}$ ؛ أ(٠،٠) ، ب(٤،٠).

(أ) ماهو نوع الراسم ر ؟

(ب) اذا كانت ق أى نقطه ، **ق*** = ر(**ق**) ، فعين البعد $\overline{ق ق^*}$.

١٧-اذا كانت و (٠،٠) ، أ (١،٠) ، ب(٦،٠) نقط معطاه :

(أ)اكتب معادلات لـ ، م بحيث أن $ر_{م} \circ ر_{ل} = ر_{(و، 90)}$

(ب) اذا كان $ر_{(أ،)}$ (ب)= (٤،٤) ، فاكتب معادلات كل من ن،ع بحيث أن

$$ر_{ع} \circ ر_{ن} = ر_{(أ،)}$$

(ج) أوجد احداثيات مركز الدوران $ر_{(أ،)} \circ ر_{(و، 90)}$

١٨- حقق أن القاعدة :

(س،ص) ← (أس - ب ص ، ب س + أص)

حيث $أ^2 + ب^2 = 1$ ، تمثل دورانا حول نقطه الأصل و .

١٩- أثبت أن ع = {ع١ ، ع٢ ، ع٣ ، ع٤} تؤلف زمره ، حيث

$ع_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (مصفوفه انعكاس فى محور الصادرات)

$ع_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (مصفوفه انعكاس فى محور السنيات)

$ع_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ مصفوفه دوران بزاويه ١٨٠ حول نقطه الأصل فى اتجاه مضاد لعقارب الساعه.

$ع_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفه دوران بزاويه ٣٦٠ حول نقطه الأصل فى اتجاه مضاد لعقارب الساعه .

هل ع زمره إبداليه ؟

٢٠- اذا كانت أ(٠،٠) ، ب(١،٣) ، ج (٢،١) هى رؤوس مثلث . أوجد الصوره النهائيه للمثلث تحت تأثير أنعكاس فى محور السنيات متبوعاً بدوران مركزه نقطه الأصل ، وزاويته ٩٠ فى اتجاه مضاد لعقارب الساعه .

٢١- أوجد : حتا ($\frac{٥ط}{٢}$ + θ) ، حتا ($\frac{٧ط}{٢}$ − θ) ، حا (٦ط − θ) مستخدماً هندسه التحويلات .

الباب الرابع

الانتقال

٤-١ : صورة النقطه بالانتقال

تعريف: الراسم **ت** يسمى انتقال اذا وجدت قطعه مستقيمه موجهه $\overleftarrow{أب}$ بحيث أن

ت(**ق**)=**ق**′ ∀ **ق** ∋ ح^٢ ، $\overleftarrow{\text{ق ق}'}$ = $\overleftarrow{أب}$.

واضح أن كل قطعه مستقيمه موجهه تعين إنتقال . سوف نستخدم الرمز $ت_{أب}$ ليعرف انتقال مناظر للقطعه المستقيمه الموجهه $\overleftarrow{أب}$.

مثال (١) : اذا كان **ت** انتقال يرسل أ (٠،-١) فوق أَ (-٣،٣) ، ب (٤،٢) فوق بَ = (١،٦) ، جـ (-١،١) فوق جـَ (-٤،٥) ، و (٠،٠) فوق وَ(-٣،٤) ، د (٣،-٤) فوق دَ (٠،٠) .عين قاعدة هذا الانتقال .

الحل

من الشكل (٤-١) يتضح لنا قاعدة هذا الراسم هى :

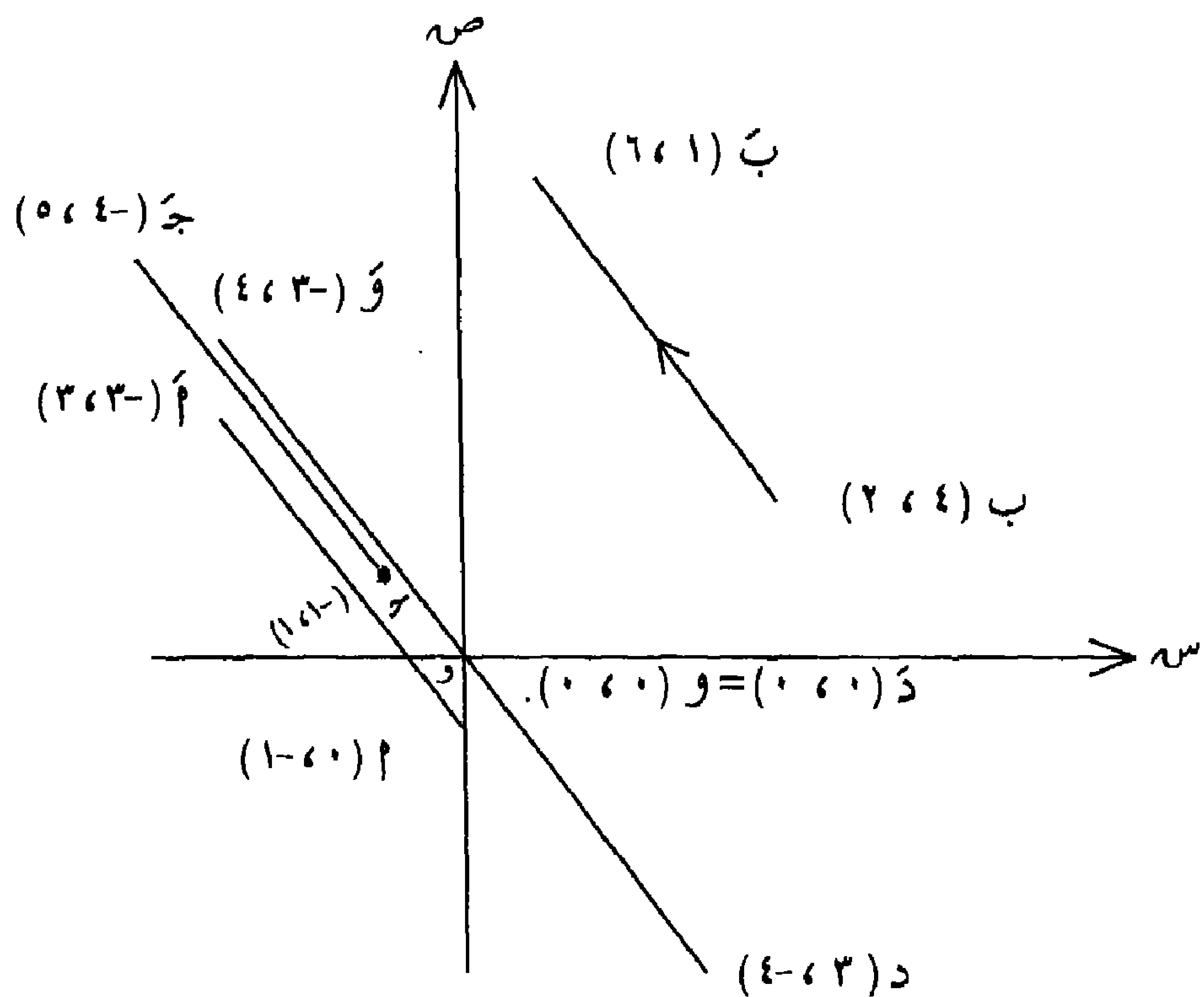
ت(س،ص) ⟵ (س-٣،ص+٤)

أو

ت(س،ص) = (س-٣، ص+٤)

كما يتضح لنا من الرسم أن :

أأ/ = ب ب/ = جـ جـ/ = و و/ = دد/ = ٥سم ، كما أنها متوازيه .



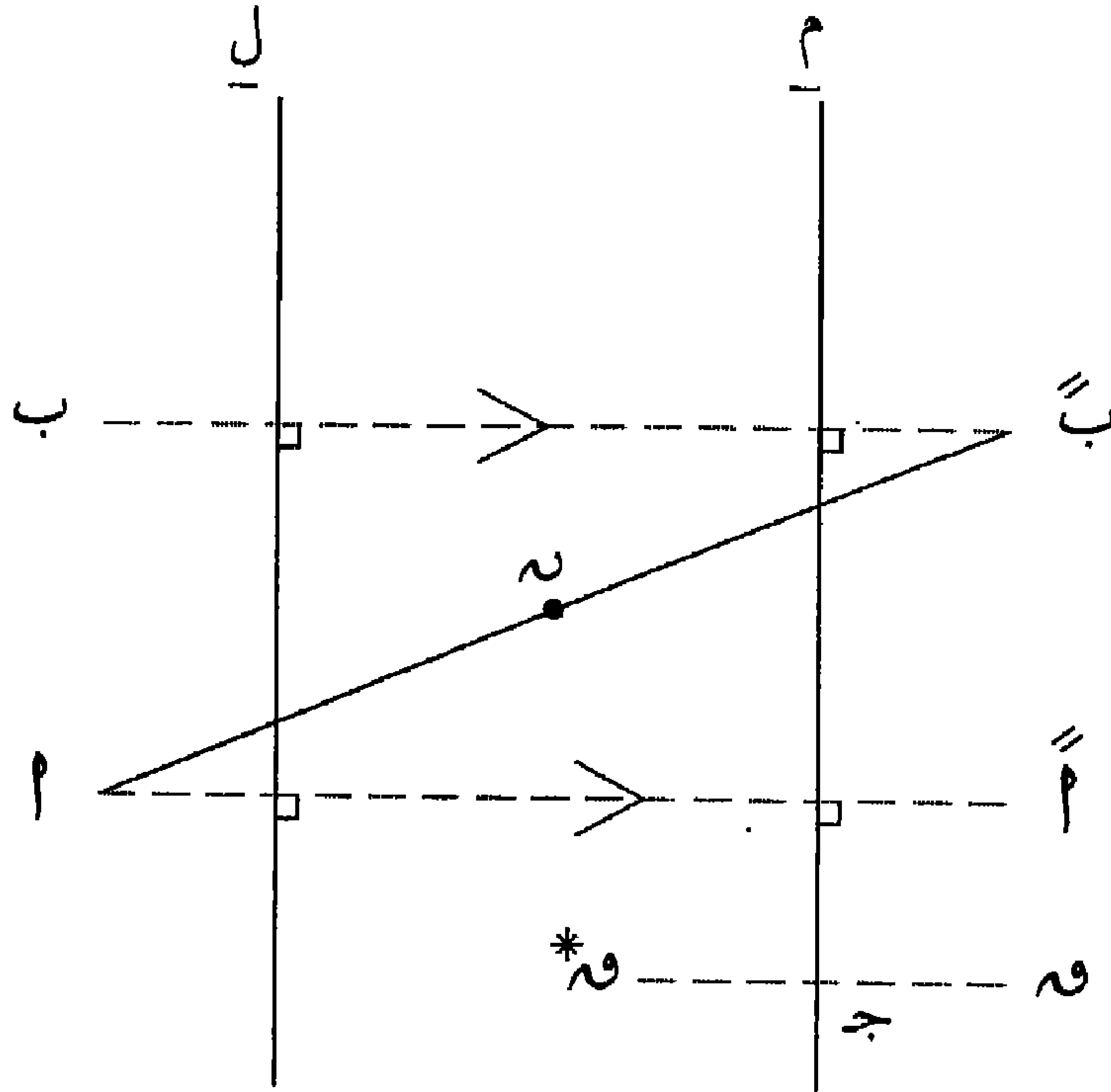
شكل (٤ – ١)

٤–٢ : خواص الانتقال

حتى نتعرف على خواص الانتقال ، فاننا سنقدم بعض النظريات الهامه التاليه :

نظريه (١) : إذا كان ل // م ؛ أ،ب نقط معطاه ، فان $\overleftarrow{ب ب''} \doteq \overleftarrow{أ أ''}$ حيث

ب'' = (سم ٥ سل) (ب) ، أ'' = (سم ٥ سل) (أ)



شكل (٤ - ٢)

البرهان : نختار ل محورا للصادرات ، ولنأخذ أى خط عمودى على ل محورا للسينيات .لنفرض أن أ(أ$_1$،أ$_2$) ، ب(ب$_1$،ب$_2$)

المطلوب اثبات أن : اذا كانت **ن** منتصف $\overline{ب'' أ}$ ، فان سن(ب)=أ'' .

بما أن م يوازى المحور الصارى ، فان معادلته تصبح س = λ ، $\lambda \neq$. واذا كانت **ق**(س،ص) أى نقطه ، **ق*** = سم(**ق**) ؛ فان $\overline{\textbf{ق ق*}}$ تقطع م فى النقطه جـ (λ ، ص) . وبما أن جـ منتصف $\overline{\textbf{ق ق*}}$، فان

$$\textbf{ق*} = سم (\textbf{ق}) = (٢\lambda - س ، ص)$$

لاحظ أيضا ، أن

سا$_{ل}$ (ق) = (− س ، ص)

اذن

(سا$_{م}$ ∘ سا$_{ل}$) (ق) = سا$_{م}$ (سا$_{ل}$ (ق)) = سا$_{م}$ (−س ، ص)

= (٢ λ +س، ص)

وبالتالى ، فان

ب$''$ = (سا$_{م}$ ∘ سا$_{ل}$) (ب) = (٢ λ +ب$_{١}$، ب$_{٢}$)

أ$''$ = (سا$_{م}$ ∘ سا$_{ل}$) (أ) = (٢ λ + أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$)

بما أن : ن منتصف $\overline{\text{ب}''\text{أ}}$ ، فان

ن = ($\frac{(٢\lambda + ب_{١}) + أ_{١}}{٢}$ ، $\frac{ب_{٢} + أ_{٢}}{٢}$)

باستخدام نظريه (٢) بالباب الثالث ، نجد أن

سا$_{ن}$ (ب) = (٢ λ + أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$) = أ$''$

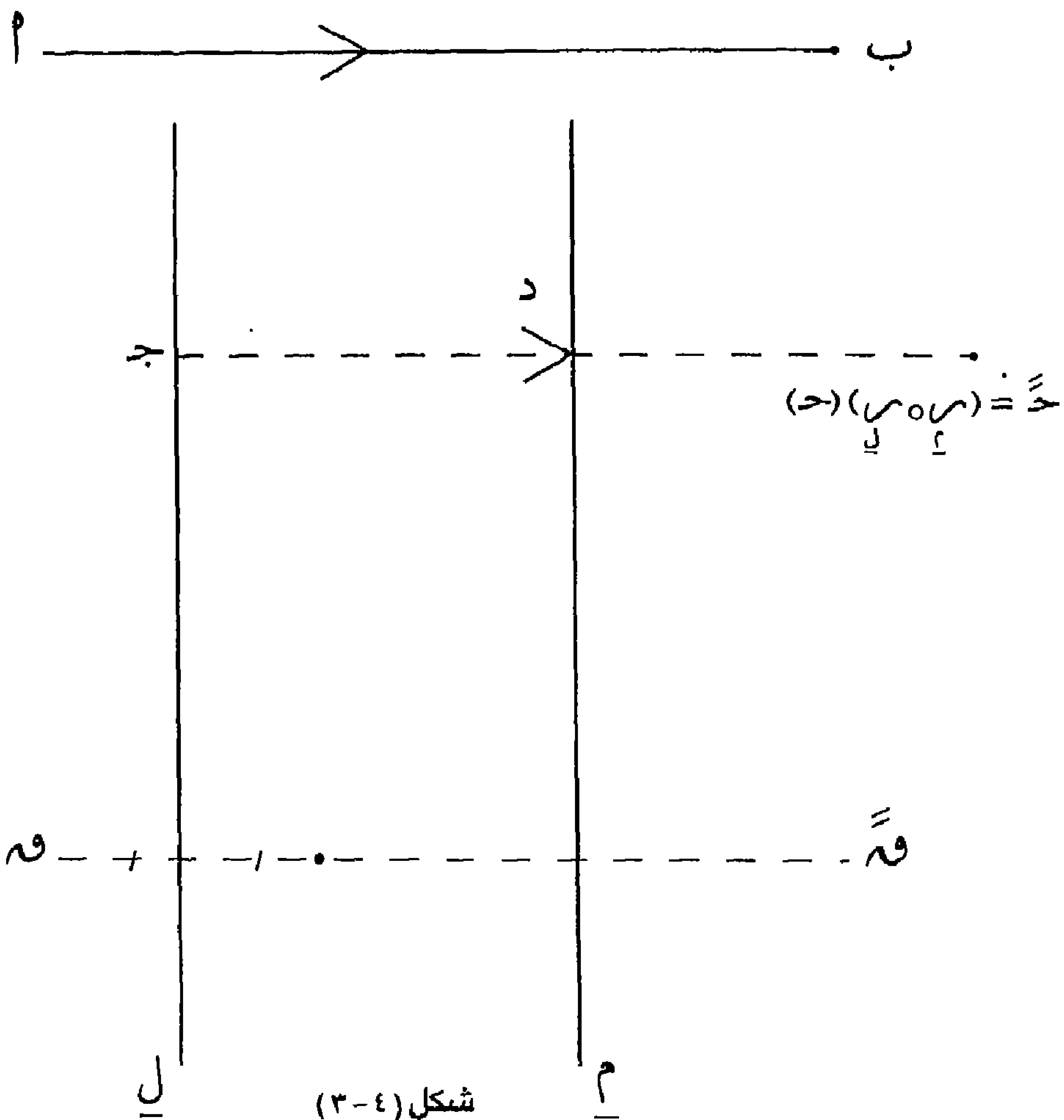
بالتالى ، فان

$\overleftarrow{\text{ب ب}''}$ ≙ $\overleftarrow{\text{أ أ}''}$

نظريه (٢) : اذا كانت $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ≙ $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ ، فان ت$_{أب}$ = ت$_{جد}$.

نظريه (٣) : ليكن ل // م ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ أى قطعه عموديه على كل من ل ، م .

اذا كانت $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ≙ ٢ $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ ، فان ت$_{أب}$ = سا$_{م}$ ∘ سا$_{ل}$



شكل (٤-٣)

البرهان :

نفرض أن ق أى نقطه .

اذن ، اذا كانت $ق^{*} = ت_{أب}(ق)$ ، $ق'' = (س_{م} \circ س_{ل})(ق)$ ،

فانه يجب علينا اثبات أن $ق'' = ق^{*}$



من تعريف الانتقال $ت_{أب}$ ينتج أن $\overrightarrow{ق\,ق^{*}} \doteq \overrightarrow{أ\,ب}$

لكن : $\overrightarrow{أ\,ب} \doteq ٢\,\overrightarrow{جـ\,د}$ فرضا

اذن

$$\overrightarrow{\text{ق ق}^*} \doteq ٢\ \overrightarrow{\text{جـ د}}$$

(من خاصية التعدى)

اذا كانت $\text{جـ}'' = (\text{سا}_{\text{م}} \circ \text{سا}_{\text{ل}})(\text{جـ})$

فان $\text{جـ}'' = \text{سا}_{\text{م}}(\text{جـ})$

اذن ، د منتصف $\overline{\text{جـ جـ}''}$ ، وبالتالى تكون $\overrightarrow{\text{جـ جـ}''} = ٢\ \overrightarrow{\text{جـ د}}$

لكن

$$\overrightarrow{\text{ق ق}''} \doteq \overrightarrow{\text{جـ جـ}''}$$ (من نظريه (١))

اذن

$$\overrightarrow{\text{ق ق}''} \doteq ٢\ \overrightarrow{\text{جـ د}}$$

حيث أن $\overrightarrow{\text{ق ق}''} \doteq ٢\ \overrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق ق}^*} \doteq ٢\overrightarrow{\text{جـ د}}$ ؛ فانه ينتج أن $\text{ق}^* = \text{ق}''$

ومن ثم يكون :

$$\text{ت}_{\text{اب}}(\text{ق}) = (\text{سا}_{\text{م}} \circ \text{سا}_{\text{ل}})(\text{ق})$$

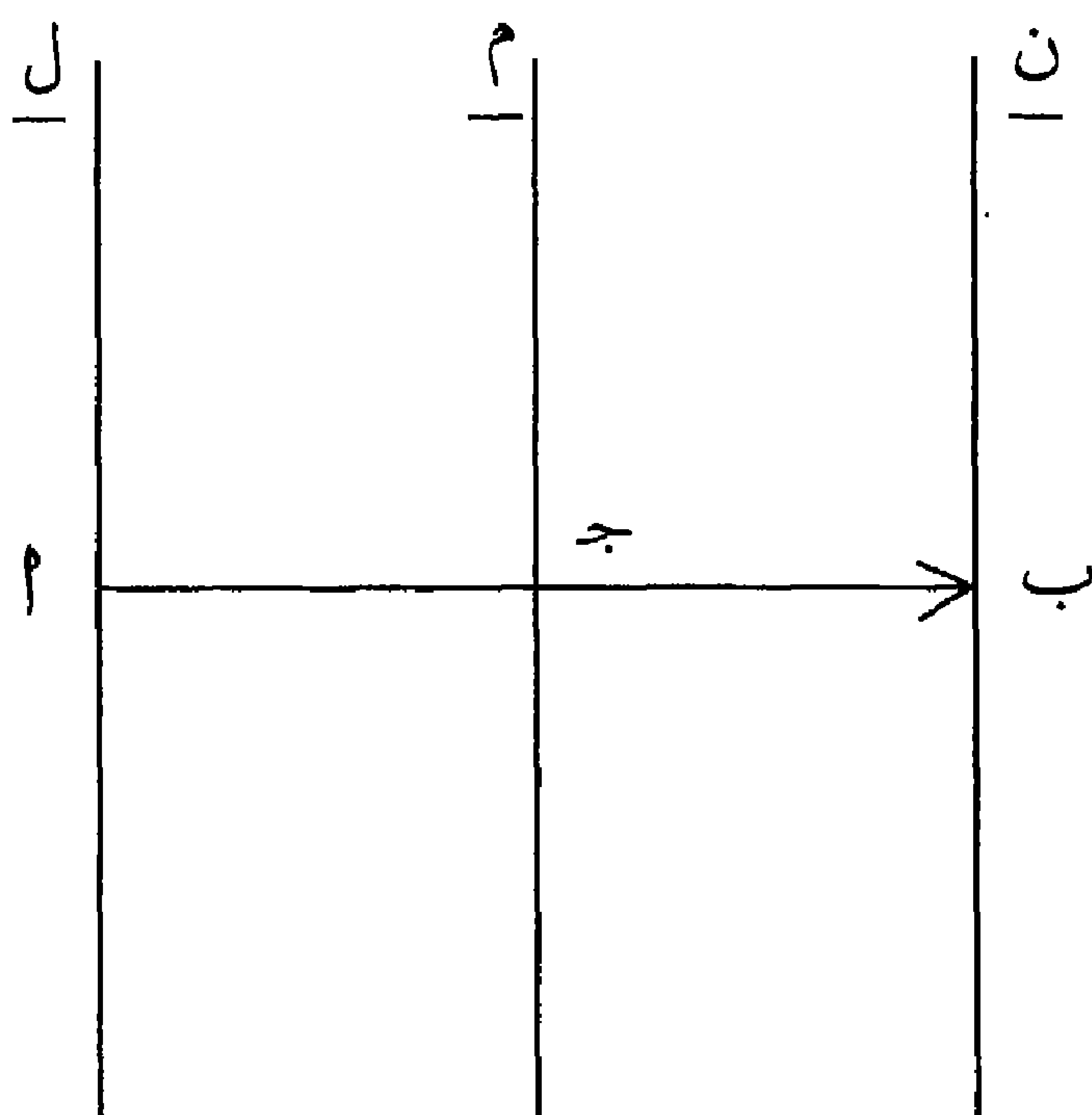
أو

$$\text{ت}_{\text{اب}} = \text{سا}_{\text{م}} \circ \text{سا}_{\text{ل}}$$



نتيجه (١) : اذا كانت ل ، م ، ن خطوط عموديه على الخط أ ب عند أ ، جـ (منتصف $\overline{\text{أ ب}}$) ، ب على التوالى ، فان

$$\text{ت}_{\text{اب}} = \text{سا}_{\text{م}} \circ \text{سا}_{\text{ل}} = \text{سا}_{\text{ن}} \circ \text{سا}_{\text{م}}$$



شكل (٤ - ٤)

نتيجه (٢) : الانتقال هو تساوى قياسى مباشر .

نتيجه (٣) : اذا كان $ت_{أب}$ أى انتقال ، فان $ت_{أب}^{-1} = ت_{بأ}$

البرهان :

لنفرض أن جـ منتصف أ ب ؛ ل ، م ، ن أى خطوط عموديه على $\overleftrightarrow{أب}$ عند أ،جـ ،ب على التوالى .

باستخدام نتيجه (١) ، نجد أن

$$\text{ت}_{\text{اب}} = \sigma_{\underline{\text{م}}} \circ \sigma_{\underline{\text{ل}}} = \sigma_{\underline{\text{ن}}} \circ \sigma_{\underline{\text{م}}}$$

$$\text{ت}_{\text{ب ا}} = \sigma_{\underline{\text{م}}} \circ \sigma_{\underline{\text{ن}}} = \sigma_{\underline{\text{ل}}} \circ \sigma_{\underline{\text{م}}}$$

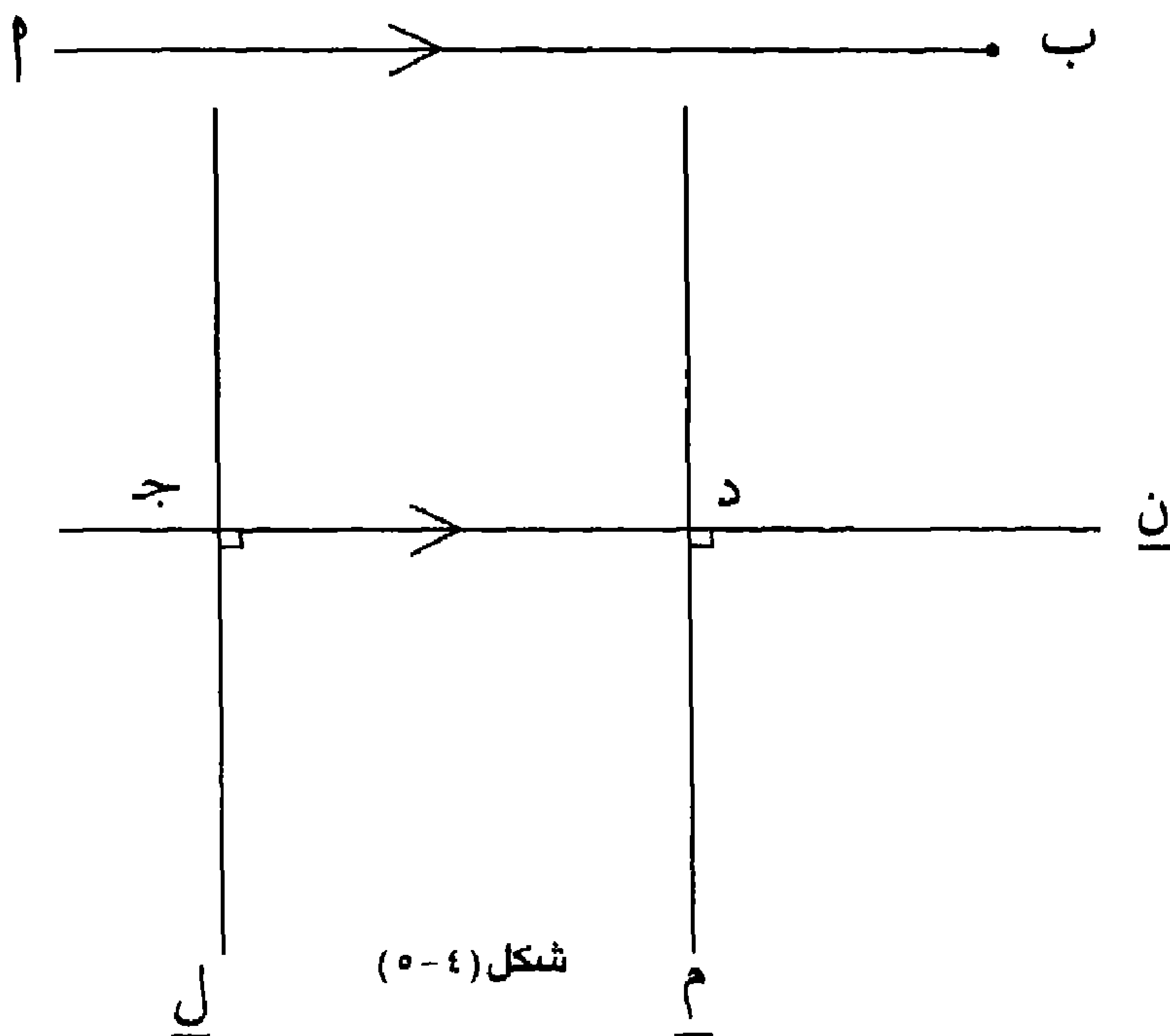
اذن $\text{ت}^{-1}_{\text{اب}} = (\sigma_{\underline{\text{ن}}} \circ \sigma_{\underline{\text{م}}})^{-1}$

$$= \sigma^{-1}_{\underline{\text{م}}} \circ \sigma^{-1}_{\underline{\text{ن}}} = \sigma_{\underline{\text{م}}} \circ \sigma_{\underline{\text{ن}}} = \text{ت}_{\text{ب ا}}$$

نظريه (٤) : نفرض أن $\text{ت}_{\text{اب}}$ انتقال ؛ أ،ب نقطتان بحيث $\overleftarrow{\text{أ ب}} \doteq ٢\,\overleftarrow{\text{جـ د}}$.

اذن

$$\text{ت}_{\text{اب}} = \sigma_{\text{د}} \circ \sigma_{\text{جـ}} .$$



شكل (٤-٥)

البرهان :

اذا أخذنا $\underline{ن} = \overleftrightarrow{جـ د}$ ؛ $\underline{ل}$ ،$\underline{م}$ خطوط متعامده على $\underline{ن}$ عند جـ ، د على التوالى ؛ فأن $\overleftarrow{جـ د}$ قطعه مستقيمه عموديه على كل من $\underline{ل}$ ، $\underline{م}$. من نظريه (٣) ، نستنتج أن :

$$ت_{اب} = س_{\underline{م}} \circ س_{\underline{ل}}$$

على الجانب الآخر :

$$س_{د} = س_{\underline{م}} \circ س_{\underline{ن}} \quad ، \quad س_{جـ} = س_{\underline{ن}} \circ س_{\underline{ل}}$$

بالتالى :

$$س_{د} \circ س_{جـ} = (س_{\underline{م}} \circ س_{\underline{ن}}) \circ (س_{\underline{ن}} \circ س_{\underline{ل}})$$
$$= ((س_{\underline{م}} \circ س_{\underline{ن}}) \circ س_{\underline{ن}}) \circ س_{\underline{ل}}$$
$$= (س_{\underline{م}} \circ (س_{\underline{ن}} \circ س_{\underline{ن}})) \circ س_{\underline{ل}}$$
$$= (س_{\underline{م}} \circ I) \circ س_{\underline{ل}} = س_{\underline{م}} \circ س_{\underline{ل}}$$

اذن

$$ت_{اب} = س_{د} \circ س_{جـ}$$

مثال (٢) : اذا كانت أ(٣،-١) ، ب(١،٧) ، ج (٤،٢) نقط معطاه ، فأوجد نقطه د بحيث أن

$$ت_{اب} = س_{د} \circ س_{جـ}$$

الحل : نفرض أن هـ نقطه بحيث أن $\overleftarrow{جـ هـ} \doteq \overleftarrow{أ ب}$.

أى أن

هـ = (٤+(١-٣) ، ٢+(٧+١)) = (٢،١٠)

اذن ، اذا كانت د منتصف $\overleftarrow{جـ هـ}$ ، فان د = (٣،٦) ،

$$\overleftarrow{جـ هـ} \doteq 2\,\overleftarrow{جـ د}$$

باستخدام خاصيه التعدى نجد أن : $\overleftarrow{أ ب} \doteq 2\,\overleftarrow{جـ د}$.

ومن نظريه (٤) نحصل على أن :

$$ت_{اب} = ر_{د} \circ ر_{جـ}$$

وأن د هى النقطه المطلوبه .

نتيجه (٤) : ليكن $ت_{اب}$ إنتقال ، $ر_{جـ}$ نصف دوره . اذن

$$ت_{اب} \circ ر_{جـ} = ر_{د}$$

حيث د تحقق أن : $2\,\overleftarrow{جـ د} \doteq \overleftarrow{أ ب}$

البرهان :

لتكن هى النقطه الوحيده بحيث أن $\overleftarrow{جـ هـ} \doteq \overleftarrow{أ ب}$ ، ولنأخذ د منتصف $\overline{جـ هـ}$.

اذن $\overleftarrow{جـ هـ} \doteq 2\,\overleftarrow{جـ د}$

وبالتالى $\overleftarrow{أ ب} \doteq 2\,\overleftarrow{جـ د}$

باستخدام نظريه (٤) ، نجد أن

$$ت_{اب} = ر_{د} \circ ر_{جـ}$$

بالتالى يكون

$$ت_{اب} \circ ر_{جـ} = (ر_{د} \circ ر_{جـ}) \circ ر_{جـ}$$

$$= ر_{د} \circ (ر_{جـ} \circ ر_{جـ}) = ر_{د} \ .$$

نتيجه (٥) : اذا كانت $ر_{ا}$ ، $ر_{ب}$ ، $ر_{جـ}$ رواسم نصف دوره ، فان

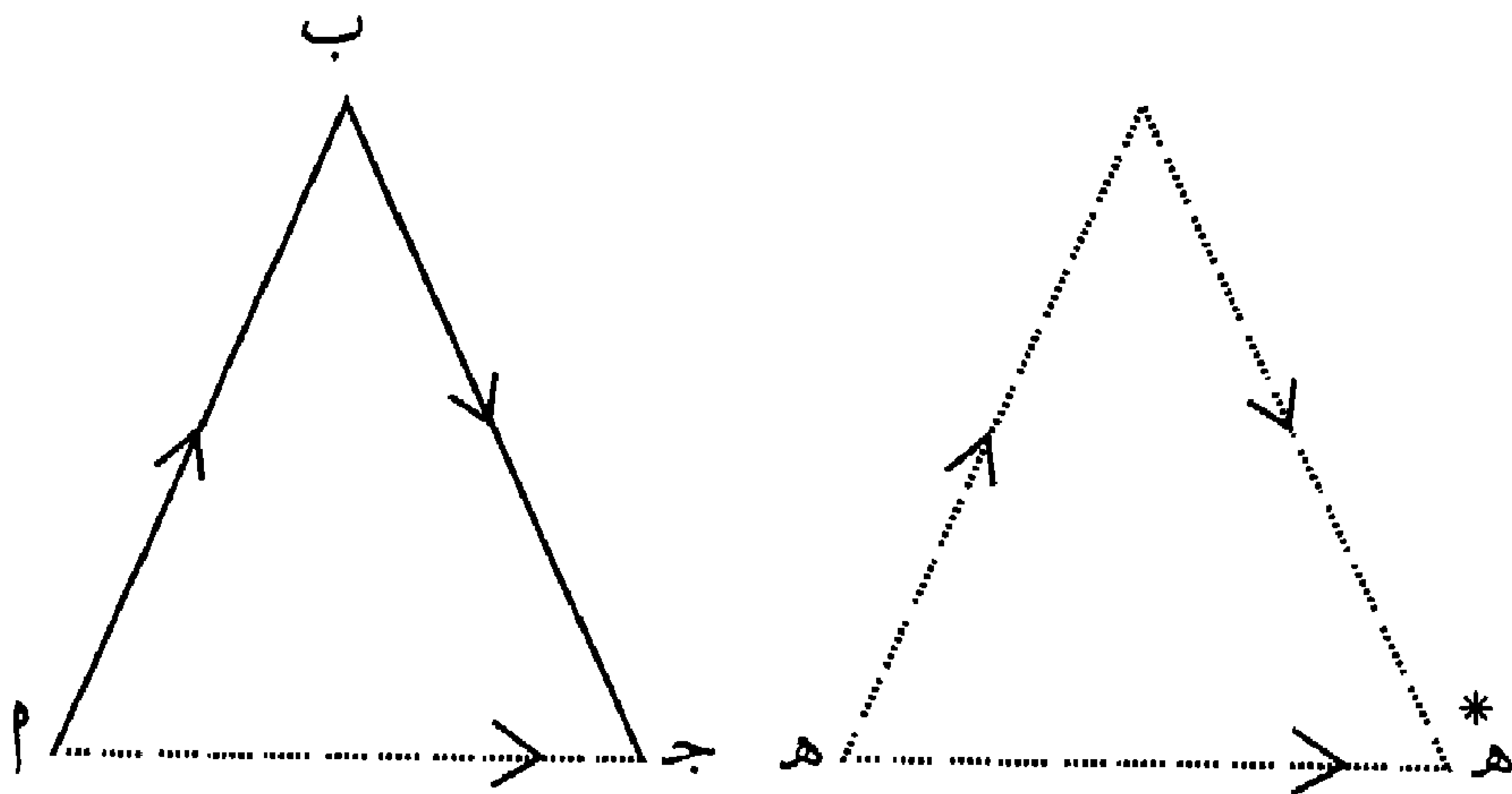
$$ر_{جـ} \circ ر_{ب} \circ ر_{ا} = ر_{د}$$



حيث د تحقق أن   أ د ≐ ب جـ

برهان هذه النتيجه يترك كتمرين .

نتيجه (٦) : تحصيل انتقالين هو انتقال .



شكل (٤-٦)

فى شكل (٤-٦) نلاحظ أن :

$(ت_{بجـ} \circ ت_{اب})(أ) = جـ$

باستخدام متوازى الأضلاع ، يمكننا برهان أنه لأى نقطه معطاه ، فان

هـ هـ* ≐ أجـ   حيث

$هـ^{*} = (ت_{بجـ} \circ ت_{اب})(هـ)$

وبالتأكيد ، سينتج أن

$ت_{بجـ} \circ ت_{اب} = ت_{اجـ}$



ملاحظه : اذا كانت جـ د ≐ ب أ ، فان

$$I = \text{ت}_{\text{با}} \circ \text{ت}_{\text{اب}} = \text{ت}_{\text{حد}} \circ \text{ت}_{\text{اب}}$$

نظريه (٥) :اذا كان $\text{ت}_{\text{وك}}$ إنتقال حيث و (٠،٠) ، ك(أ،ب) ؛ ر راسماً معرفاً بالقاعده

$$\text{ر}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} ، \text{ص} + \text{ب}) \qquad \forall\ \text{ق} \in \text{ح}^{٢} ،$$

فان $\text{ت}_{\text{وك}} = \text{ر}$

البرهان :

$$\text{ر}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} ، \text{ص} + \text{ب}) \qquad \forall\ \text{ق}(\text{س}، \text{ص}) \in \text{ح}^{٢}$$

نفرض أن

$$\text{ق}^{*} = \text{ت}_{\text{وك}}(\text{ق})$$

اذن

$$\overleftarrow{\text{ق}\,\text{ق}^{*}} \doteq \overleftarrow{\text{و}\,\text{ك}}$$

اذن $\text{ق}^{*} = (\text{س} + \text{أ} - ٠ ، \text{ص} + \text{ب} - ٠)$

$= (\text{س} + \text{أ} ، \text{ص} + \text{ب})$

وبالتالى فان : $\text{ر}(\text{ق}) = \text{ت}_{\text{وك}}(\text{ق})$

أى أن $\text{ت}_{\text{وك}} = \text{ر}$.

من هذه النظريه يتضح أن أى إنتقال يمكن تعريفه لجميع النقط ق(س،ص) بالقاعده

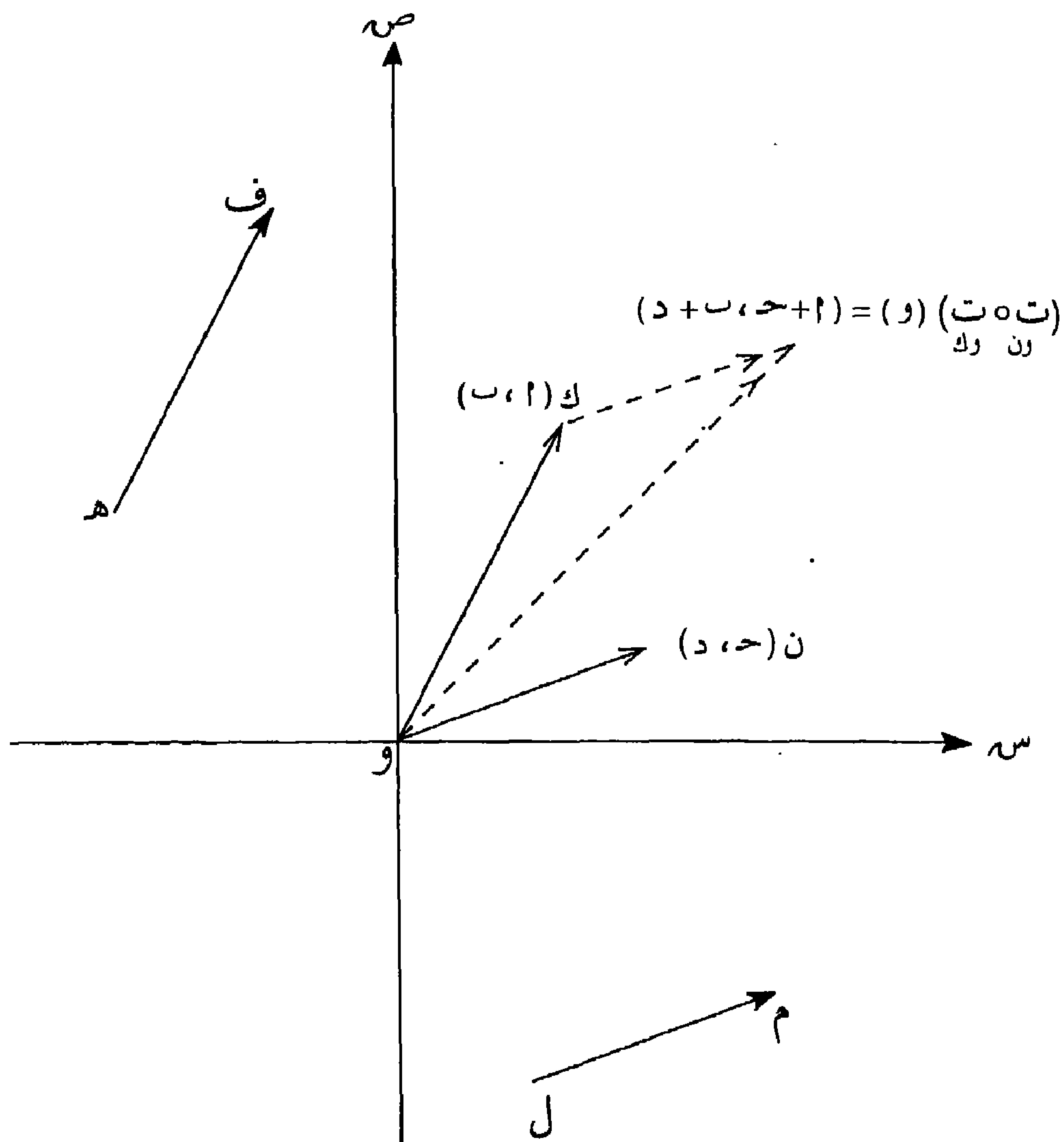
$$\text{ت}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} ، \text{ص} + \text{ب})$$

وللحصول على الأعداد أ ، ب فاننا نلاحظ ببساطه إحداثيات صوره نقطه الأصل . وبالتالى اذا كانت و هى نقطه الأصل ، ت(و) = (أ،ب) ،فان

$$\text{ت}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} ، \text{ص} + \text{ب})$$

ولبرهان خاصية الانغلاق للانتقالات ، فأننا سنعتبر أى انتقالين

$$\text{ت}_{\text{هف}} ، \text{ت}_{\text{لم}}$$



شكل (٤-٧)

لنفرض أن ك (أ ،ب) ، ن(جـ ،د) أى نقط بحيث أن $\overleftarrow{\text{وك}} \doteq \overleftarrow{\text{هـ ف}}$ ، $\overleftarrow{\text{ون}} \doteq \overleftarrow{\text{ل م}}$.

اذن ، لأى نقطه ق (س ،ص) يكون

$$\text{ت}_{\text{هـ ف}}(\text{ق}) = \text{ت}_{\text{و ك}}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{أ} \text{ ، } \text{ص} + \text{ب}) \text{ ،}$$

$$\text{ت}_{\text{ل م}}(\text{ق}) = \text{ت}_{\text{و ن}}(\text{ق}) = (\text{س} + \text{جـ} \text{ ، } \text{ص} + \text{د})$$

بالتالى ،فان

$(ت_{لم} \circ ت_{هف})(ق) = (ت_{ون} \circ ت_{وك})(ق)$

$= ت_{ون}(ت_{وك}(ق))$

$= ت_{ون}(س + أ ، ص + ب)$

$= ((س + أ) + جـ ، (ص + ب) + د)$

$= (س + (أ + جـ) ، ص + (ب + د))$

اذن ، من نظريه (٥) يكون $ت_{لم} \circ ت_{هف}$ هو انتقال يرسل نقطه الأصل فوق النقطه (أ + جـ ، ب + د) .

مثال (٣) : اذا كان $ت_{هف}$ انتقال يرسل هـ(٢،٣) فوق ف(٤،١) ، $ت_{لم}$ إنتقال يرسل ل (−٣،٤) فوق م (٠،٣)

عين $(ت_{لم} \circ ت_{هف})(ق)$ $\forall$ ق(س،ص) $\in$ $ح^٢$.

الحل :

ليكن $ت_{هف}$(و) = وَ ، $ت_{لم}$(و) = $و^*$

اذن

$\overrightarrow{و وَ} \doteq \overrightarrow{هـ ف}$ ، $\overrightarrow{و و^*} = \overrightarrow{ل م}$.

بالتالى :

وَ = (٠ + ٤ − ٢ ، ٠ + ١ − ٣) = (٢ ، −٢) ،

$و^*$ = (٠ + ٠ + ٣ ، ٠ + ٣ − ٤) = (٣ ، −١)

اذن

ت هف (ق) = (س +٢ ، ص− ٢) ،

ت مل (ق) = (س+ ٣ ، ص− ١) .

ومن ثم يكون :

(ت مل ٥ ت هف) (ق) = ت مل (ت هف (ق))

= ت مل (س +٢ ، ص− ٢)

= ((س +٢) + ٣ ، (ص−٢)−١)

= (س+ ٥ ، ص− ٣)

مثال (٤) : اذا كان ل = {(س،ص) : ص = ٣س+ ٤} ؛ أ(٢، ٣) ،ب (−١،−٢) ، جـ (٣ ، ٥) نقط معطاه ، فاكتب معادله

لَ = (ت أب ٥ ر) (ل) .

الحل :

ت أب ٥ رجـ = رد

حيث $\overrightarrow{\text{أب}}$ ≐ ٢ $\overrightarrow{\text{جـ د}}$.

أى أن

(−١،−٢) − (٢،٣) = ٢ ((س ، ص) − (٣،٥))

(على فرض أن د (س ، ص))

(−٣،−٥) =٢(س−٣،ص−٥)

أى أن − ٣= ٢ س −٦ ، − ٥=٢ ص−١٠

أو س = $\frac{٣}{٢}$ ، ص = $\frac{٥}{٢}$

أو د = ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$) .

اذن ر د (س، ص) = (٣ - س ، ٥ - ص)

(من قاعده راسم نصف الدوره)

لكن ق١ (٠، ٤) ∈ ل ، ق٢ (١، ٧) ∈ ل

اذن ر د (ق١) = ر د (٠، ٤) = (٣ ، ١) = ق١َ ؛

ر د (ق٢) = ر د (١، ٧) = (٢، -٢) = ق٢َ

ميل ق١َ ق٢َ = (١ + ٢) / (٣ - ٢) = ٣

اذن معادله لَ :

ص-١ = ٣ (س-٣)

ص-١ = ٣ س - ٩

أى أن

لَ : ص = ٣س - ٨

أو

لَ = {(س،ص) : ص = ٣س-٨}

حل آخر :

أب ≐ وو

(-٢ ، -٢) - (٢، ٣) = (سَ ، صَ) - (٠ ، ٠)

(سَ ، صَ) = (-٣ ، -٥) = وَ

اذن ت أب (س ، ص) = (س-٣ ، ص- ٥)

وبالتالى :

(ت أب ٥ ر هـ)(ق١) = ت أب (ر هـ (ق١)) حيث ق١(٠،٤) ∈ ل

$= ت_{أب} \left(\text{حـ}_{س} (٠ ، ٤) \right)$

$= ت_{أب} (٦ - ٠ ، ١٠ - ٤)$

$= ت_{أب} (٦ ، ٦) = (٣ ، ١) = ق'_١$ ،

$(ت_{أب} \circ \text{حـ}_{س})(ق_٢) = ت_{أب} \left(\text{حـ}_{س} (ق_٢) \right)$ حيث $ق_٢ (١ ، ٧) \in ل$

$= ت_{أب} \left(\text{حـ}_{س} (١ ، ٧) \right)$

$= ت_{أب} (٦ - ١ ، ١٠ - ٧)$

$= ت_{أب} (٥ ، ٣) = (٢ ، - ٢) = ق'_٢$

ميل الخط $\overleftrightarrow{ق'_١ ق'_٢} = \frac{١ + ٢}{٣ - ٢} = ٣$

اذن :

$ل' = \{ (س، ص) : ص = ٣س - ٨ \}$.

مثال (٥) : اذا كانت أ (٤ ، ٣) ن ب(٩ ، ٨) نقط معطاه ، وكانت الدائره

$د = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ = ١ \}$.

فأوجد صوره هذه الدائره بالانتقال $ت_{أب}$.

الحل:

$\overleftarrow{أب} \doteq \overleftarrow{وو^*}$

$(٩ ، ٨) - (٤ ، ٣) = (س^* ، ص^*) - (٠ ، ٠)$

$(٥ ، ٥) = (س^* ، ص^*) = و^*$

اذن

$ت_{أب} (ق) = ت_{أب} (س ، ص) = (س + ٥ ، ص + ٥) \quad \forall ق \in ح^٢$

وحيث أن : (حتاθ، حاθ) $\in$ د

اذن

$ت_{أب}$ (حتا θ ، حاθ) = (حتاθ+ ٥ ، حاθ+ ٥) = (سَ ، صَ)

أى أن :

سَ = حتا θ + ٥ ، صَ = حا θ + ٥

ويحذف البارامتر θ نحصل على :

$(سَ - ٥)^{٢} + (صَ - ٥)^{٢} = ١$

وهى معادله دائره مركزها (٥ ، ٥) ونصف قطرها = ١

وبالتالى ، فان

$دَ = \{(س ، ص) : (سَ - ٥)^{٢} + (صَ - ٥)^{٢} = ١\}$

مثال (٦) : اذا كانت أ (− ٤ ، ٥) ، ب (−٦ ، ٩) ، جـ (٣ ، − ٣) نقط معطاه .

أوجد صوره :

$د = \{(س، ص) : \frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{٤} = ١\}$

تحت تأثير التحويله ($ت_{أب}$ ∘ $ر_{جـ}$) .

الحل:

$\overrightarrow{أب} \doteq \overrightarrow{وو^{*}}$

(− ٦، ٩) − (− ٤، ٥) = ($س^{*}$ ، $ص^{*}$)

(−٢، ٤) = ($س^{*}$، $ص^{*}$) = $و^{*}$

اذن :

$ت_{أب}$ (ق) = $ت_{أب}$ (س،ص) = (س − ٢، ص + ٤) (i)

$ر_{جـ}$ (ق) = $ر_{جـ}$ (س،ص) = (٦−س، −٦−ص) (ii)

وحيث أن :

(٤حتاθ ، ٢حاθ) $\in$ د

اذن:

(ت$_{\text{أب}}$ ∘ ر$_{\text{ح}}$) (٤جتا θ، ٢جا θ) = ت$_{\text{أب}}$ (ر$_{\text{ح}}$(٤جتا θ، ٢جا θ))

= ت$_{\text{أب}}$ (٦-٤جتا θ، -٦-٢جا θ)

=(٦-٤جتا θ - ٢، -٦-٢جا θ +٤)

= (٤- ٤جتا θ، -٢-٢جا θ)

= (سَ، صَ)

بالتالى :

سَ = ٤-٤جتا θ ، صَ = -٢-٢جا θ

أو

سَ-٤=-٤جتا θ ، صَ+٢=-٢جا θ

وبحذف البارامتر θ نحصل على :

$$\frac{(\text{سَ}-٤)^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{صَ}+٢)^{٢}}{٤} = ١$$

أو نكتب :

$$\text{دَ} = \{(\text{سَ،صَ}) : \frac{(\text{سَ}-٤)^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{صَ}+٢)^{٢}}{٤} = ١\}$$

وهى تمثل قطع ناقص مركزه (٤،-٢) .

مثال (٧) : اذا كانت أ (٥ ، ٠) ، ب(١، ٠) ، و(٠ ، ٠) نقط معطاه .
أوجد صوره

$$\text{د} = \{(\text{س،ص}) : \frac{(\text{س}-٨)^{٢}}{٣٦} + \frac{(\text{ص}-٤)^{٢}}{١٦} = ١\}$$

تحت تأثير التحويله (مو ∘ مل) ∘ ت أب .

حيث ل = { (س،ص) : ص = س } .

الحل :

أب ≐ وو*

(١ ، ٠) - (٥ ، ٠) = (س* ، ص*)

(-٤ ، ٠) = (س*، ص*) = و

اذن:

ت أب (ق) = ت أب (س، ص) = (س-٤ ، ص)

وحيث أن :

(٦ حتا θ + ٨ ، ٤ حا θ +٤) ∈ ك

اذن

(مو ∘ مل) ∘ ت أب) (٦ حتا θ + ٨ ، ٤ حا θ +٤)

= (مو ∘ مل) (ت أب (٦حتاθ+٨،٤حاθ+٤))

= (مو ∘ مل)) (٦ حتا θ + ٤، ٤حا θ +٤)

= مو (مل (٦حتاθ+٤،٤حاθ+٤))

= مو (٤حاθ+٤،٦حتاθ+٤)

= (-٤حاθ-٤،-٦حتاθ-٤) = (سَ ، صَ)

أى أن :

سَ = -٤حاθ-٤ ، صَ = -٦حتاθ-٤

أو

سَ +٤= -٤حاθ ، صَ + ٤= -٦ حتاθ

وبحذف البارامتر θ نحصل على :

$$\frac{(س' + ٤)^٢}{١٦} + \frac{(ص' + ٤)^٢}{٣٦} = ١$$

أو نكتب :

$$د' = \{(س'،ص') : \frac{(س' + ٤)^٢}{١٦} + \frac{(ص' + ٤)^٢}{٣٦} = ١\}$$

فى نهايه هذا البند ، نستطيع أن نجمل خواص الانتقال كالآتى :

١- الانتقال تحويله هندسيه (مستويه)

٢-الانتقال تساوى قياسى.

٣-الانتقال يحفظ مقياس الزوايا .

٤-الانتقال تحويله مباشرة .

٥-الانتقال ليس له نقطه ثابته إلا إذا كان الانتقال هو الراسم المحايد .

٦- الانتقال يحفظ البينيه واستقامه النقط والتوازى.

٤-٣ : مصفوفه الانتقال

من نظريه (٥) وجدنا أن :

$$ت_{وك}(\mathbf{ق}) = \mathbf{ق}'(س + أ ، ص+ب) \qquad \forall\ \mathbf{ق}\ (س،ص) \in ح^٢$$

حيث ك =(أ،ب) ، و نقطه الأصل .

أى : $(س' ، ص') = (س + أ ، ص+ب)$

بالتالى :

$$س' = س + أ \qquad ، \quad ص' = ص + ب$$

ويعبر عن ذلك كالآتى :

$$\begin{bmatrix} س' \\ ص' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix}$$

توضيح ذلك ، فى المثال التالى .

مثال (٨) : اذا كان $ت_{هى}$ انتقال يرسل هــ (٤،٥) فوق ف(٨،٥) ، فأوجد $ت_{هى}$ (−١،٢) .

الحل:

$\overrightarrow{هــ ف} \doteq \overrightarrow{وو^*}$

(٨ ، ٥) − (٤ ، ٥) = (س*، ص*) − (٠، ٠)

(٤ ، ٠) = (س* ، ص*) = و*

اذن :

$$\begin{bmatrix} س' \\ ص' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

أو (س' ، ص') = (٣ ، ٢) .

أى أن

$ت_{هى}$ (−١،٢) = (٣ ، ٢)

مثال (٩) : اذا كان أ(٤،−١) ، ب(٣،٢) نقط معطاه ، وكانت الدائره

د = {(س، ص) : $س^٢ + ص^٢$ = ٤ }

فأوجد صوره هذه الدائره بالانتقال $ت_{اب}$.

الحل :

$\overrightarrow{أب} \doteq \overrightarrow{وو^*}$

(٣،٢) − (٤ ، −١) = (س* ،ص*) − (٠،٠)

(−١،٣) = (س* ،ص*) = و*

اذن:

$$\begin{bmatrix} س' \\ ص' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢حتا\theta \\ ٢حا\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢حتا\theta - ١ \\ ٢حا\theta + ٣ \end{bmatrix}$$

أو $س' = ٢حتا\theta - ١$ ، $ص' = ٢حا\theta + ٣$

وبحذف البارامتر θ نحصل على :

$$(س'+١)^٢ + (ص' - ٣)^٢ = ٤$$

أو نكتب :

$$د' = \{(س'،ص') : (س'+١)^٢ + (ص'-٣)^٢ = ٤\}$$

مثال (١٠) : اذا كانت هـ (−٣،٤) ، ف(٠،٦) ، و (٠،٠) نقط معطاه .

أوجد صوره :

$$ع = \{(س،ص) : \frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٤} = ١\}$$

تحت تأثير التحويله ($ت_{هـف} \circ م_و$) .

الحل:

$$\overrightarrow{هـف} = \overrightarrow{وو^*}$$

$$(٠،٦) - (−٣،٤) = (س^*،ص^*) - (٠،٠)$$

$$(٣،٢) = (س^*،ص^*) = و^*$$

وحيث أن (٤قاθ ، ٢طاθ) ∈ ع ، فان

$$\begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} −١ & ٠ \\ ٠ & −١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤قا\theta \\ ٢طا\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} −٤قا\theta \\ −٢طا\theta \end{pmatrix} \qquad ((i))$$

بالتالى ، فان :

$$\begin{pmatrix} س'' \\ ص'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س' \\ ص' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\text{٤قا}\,\theta \\ -\text{٢طا}\,\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{٣} \\ \text{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{٤قا}\,\theta + \text{٣} \\ -\text{٢طا}\,\theta + \text{٢} \end{pmatrix} \qquad (ii)$$

أى أن

$$\text{س}'' = -\text{٤قا}\,\theta + \text{٣} \quad \text{،} \quad \text{ص}'' = -\text{٢طا}\,\theta + \text{٢}$$

ومنها

$$-\frac{\text{١}}{\text{٤}}(\text{س}'' - \text{٣}) = \text{قا}\,\theta \quad \text{،} \quad -\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ص}'' - \text{٢}) = \text{طا}\,\theta$$

وبحذف البارامتر θ نحصل على :

$$\frac{(\text{س}'' - \text{٣})^{\text{٢}}}{\text{١٦}} - \frac{(\text{ص}'' - \text{٢})^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \text{١}$$

أو نكتب :

$$\text{ع} = \left\{ (\text{س}''\text{،}\,\text{ص}'') : \frac{(\text{س}'' - \text{٣})^{\text{٢}}}{\text{١٦}} - \frac{(\text{ص}'' - \text{٢})^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \text{١} \right\}$$

تمارين عامه

١- اذا كان ت انتقال يرسل أ(٣،٢) فوق أَ (٢،٣) ، ب (٠،٠) فوق بَ(-١،١) ،
جـ (-١،-٤) فوق جَـ (-٢،-٣) . عين قاعده هذا الانتقال .

٢-اثبت أنه اذا كان ت انتقالاً قاعدته

(س،ص) ← (٢أ + س ، ٢ب + ص)

فان معكوسه يكون انتقالاً قاعدته

(س، ص) ← (س-٢أ ، ص-٢ب)

٣- بين صحه أوخطأ مايلى :

(أ) $\text{ت}_{\text{أب}} = \text{ر}_{\underline{\text{ل}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{م}}} \Leftarrow \text{ت}_{\text{ب أ}} = \text{ر}_{\underline{\text{م}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{ل}}}$

(ب) $\text{ت}_{\text{أب}} \circ \text{ت}_{\text{أب}} = \text{ت}_{\overline{\text{٢أب}}}$

(ج) اذا كانت جـ منتصف أب ،فان

$(\text{ت}_{\text{جـب}} \circ \text{ت}_{\text{أب}})(\text{جـ}) = \text{ت}_{\text{٢أب}}(\text{أ})$

(د) $\underline{\text{ل}}'' = (\text{ت}_{\text{أب}} \circ \text{ر}_{\text{هـ}})(\underline{\text{ل}}) \Leftarrow \underline{\text{ل}}'' // \underline{\text{ل}}$.

٤- اذا كانت أ(٢،٣) ، ب(-٤،٧) نقط معطاه ، فاكتب معادله كل من الخطوط $\underline{\text{ل}}$،$\underline{\text{م}}$ بحيث أن

$\text{ر}_{\underline{\text{م}}} \circ \text{ر}_{\underline{\text{ل}}} = \text{ت}_{\text{أب}}$

٥- اذا كانت أ(-١،٣) ، ب(-٥،-١) ،جـ (٢،٤) نقط معطاه :

(أ) عين جـَ = $\text{ت}_{\text{اب}}$ (جـ)

(ب) اكتب معادلات الخطوط ل ، م بحيث أن جـ ∈ ل ، $\text{سـ}_{\text{م}} \circ \text{سـ}_{\text{ل}} = \text{ت}_{\text{اب}}$

٦ - اذا كانت أ(٢،١) ، ب (٥،-٣) نقط معطاه ، ت انتقال يرسل أ فوق ب :

(أ) أوجد ت (جـ) اذا كانت جـ = (٤،٢) .

(ب) اذا كانت ق (س ، ص) أى نقطه ، فعين ت (ق) .

٧-اذا كان $\overleftarrow{\text{اب}} \doteq \overleftarrow{\text{جـد}}$ ، فبرهن أن $\text{ت}_{\text{اب}} = \text{ت}_{\text{جـد}}$.

٨-اذا وجدت نقطه ك بحيث أن $\text{ت}_{\text{ب}}$ (ك) = $\text{ت}_{\text{د}}$ (ك) ، فبرهن أن $\text{ت}_{\text{ب}} = \text{ت}_{\text{د}}$

٩- اذا كان ت انتقال معرف بالقاعده

ت (س ،ص) = (س+ ٢ ، ص + ٣) .

وكانت جـ (١،-٧) نقطه معطاه ، فعين احداثيات د بحيث أن

$\text{سـ}_{\text{د}} \circ \text{سـ}_{\text{جـ}} = \text{ت}$

١٠-اذا كانت أ(١،٠) ، ب (٢،٥) ، جـ (-٣،٨) نقط معطاه ، فعين إحداثيات د حيث أن

$\text{ت}_{\text{جـد}} = \text{سـ}_{\text{ب}} \circ \text{سـ}_{\text{ا}}$

١١-لتكن أ(٢،١) ، ب(-٣،٥) نقط معطاه .

(أ)عين ($\text{سـ}_{\text{ا}} \circ \text{سـ}_{\text{ب}}$)(ق) اذا كانت ق (س،ص) أى نقطه .

(ب) اكتب معادله دَ = ($\text{سـ}_{\text{ا}} \circ \text{سـ}_{\text{ب}}$) (د) اذا كانت

د = {(س،ص) : س^{٢} + ص^{٢} = ٤ }

١٢- اذا كان ل = {(س،ص) : ص = س - ٤} ؛ أ(٢،-١) ،ب(-١،-٢)،جـ (١،٣)

نقط معطاه ، فاكتب معادله ل حيث

$$ل = (ت_{اب} \circ م_{جـ})(ل)$$

١٣- اذا كانت أ ($أ_١$، $أ_٢$) ، ب ($ب_١$، $ب_٢$) نقط معطاه ، وكانت الدائره

$$د = \{(س،ص) : س^٢ + ص^٢ = بق^٢\}$$

فأوجد صوره هذه الدائره بالانتقال $ت_{اب}$.

١٤ - اذا كانت هـ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ف ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، جـ ($س_٣$ ، $ص_٣$) نقط معطاه .

أوجد صوره :

$$د = \{(س،ص) : \frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١\}$$

تحت تأثير التحويله ($ت_{هـف} \circ م_{جـ}$) .

١٥-اذا كانت هـ ($س_١$،$ص_١$) ، ف($س_٢$،$ص_٢$) ، و(٠،٠) نقط معطاه .

أوجد صوره :

$$د = \{(س،ص) : \frac{(س-٢)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص+٣)^٢}{ب^٢} = ١\}$$

تحت تأثير التحويل ($م_و \circ م_{ل}$) $\circ$ $ت_{هـف}$ ، حيث

ل = { (س،ص) : ص = - س} .

١٦- اذا كانت هـ (-١،٥) ، ف(-٢،٧) ، و (٠،٠) نقط معطاه .

أوجد صوره

$$ع = \{(س،ص) : \frac{س^٢}{٣٦} - \frac{ص^٢}{٤} = ١\}$$

تحت تأثير التحويله ($ت_{هـف} \circ م_و$) .

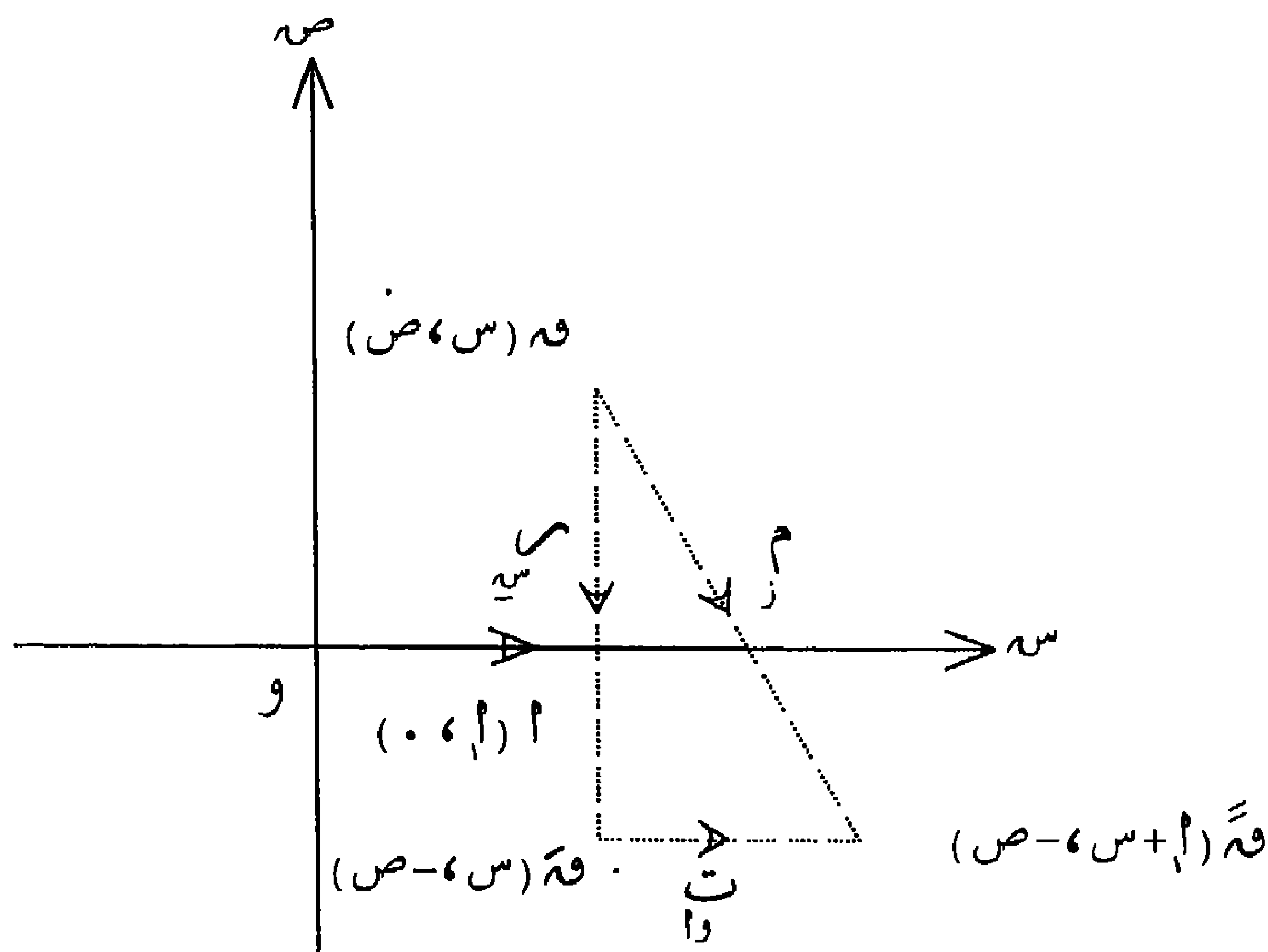
الباب الخامس

الانعكاس الانزلاقى ووحدانيه التساويات القياسيه

٥–١ : صورة النقطه بالانعكاس الانزلاقى :

تعريف : الراسم $م_{ز}$ يسمى انعكاس انزلاقى اذا وجد خط ل وقطعه مستقيمه $\overleftarrow{أب}$ موازيه للخط ل بحيث أن : $م_{ز} = ت_{اب} \circ ر_{ل}$. الخط ل يسمى **محور الانعكاس الانزلاقي** .

من الممكن ملاحظه أن : حيث أن الانتقال يكافىء تحصيل أنعكاسين ، فان الانعكاس الانزلاقى يمكن التعبير عنه كحاصل ثلاثه انعكاسات . من الممكن عندئذ استنتاج أن الانعكاسات الانزلاقيه هى تحويلات هندسيه(مستويه) وأيضاً تساويات



شكل (٥ – ١)

قياسيه مضاده .

مثال (١) : اذا كانت أ ($أ_١$ ، ٠) ، و(٠،٠) نقط معطاه ، فان

$ت_{وأ}$ (س،ص) = (س+$أ_١$، ص) ∀ (س،ص) ∋ $ح^٢$

$ر_{س}$ (س،ص) = (س، − ص) ∀ (س،ص) ∋ $ح^٢$

اذن :

$م_{ز}$ (س،ص) = ($ت_{وأ}$ o $ر_{س}$) (س،ص)

= $ت_{وأ}$ ($ر_{س}$ (س ، ص) = $ت_{وأ}$ (س ، −ص)

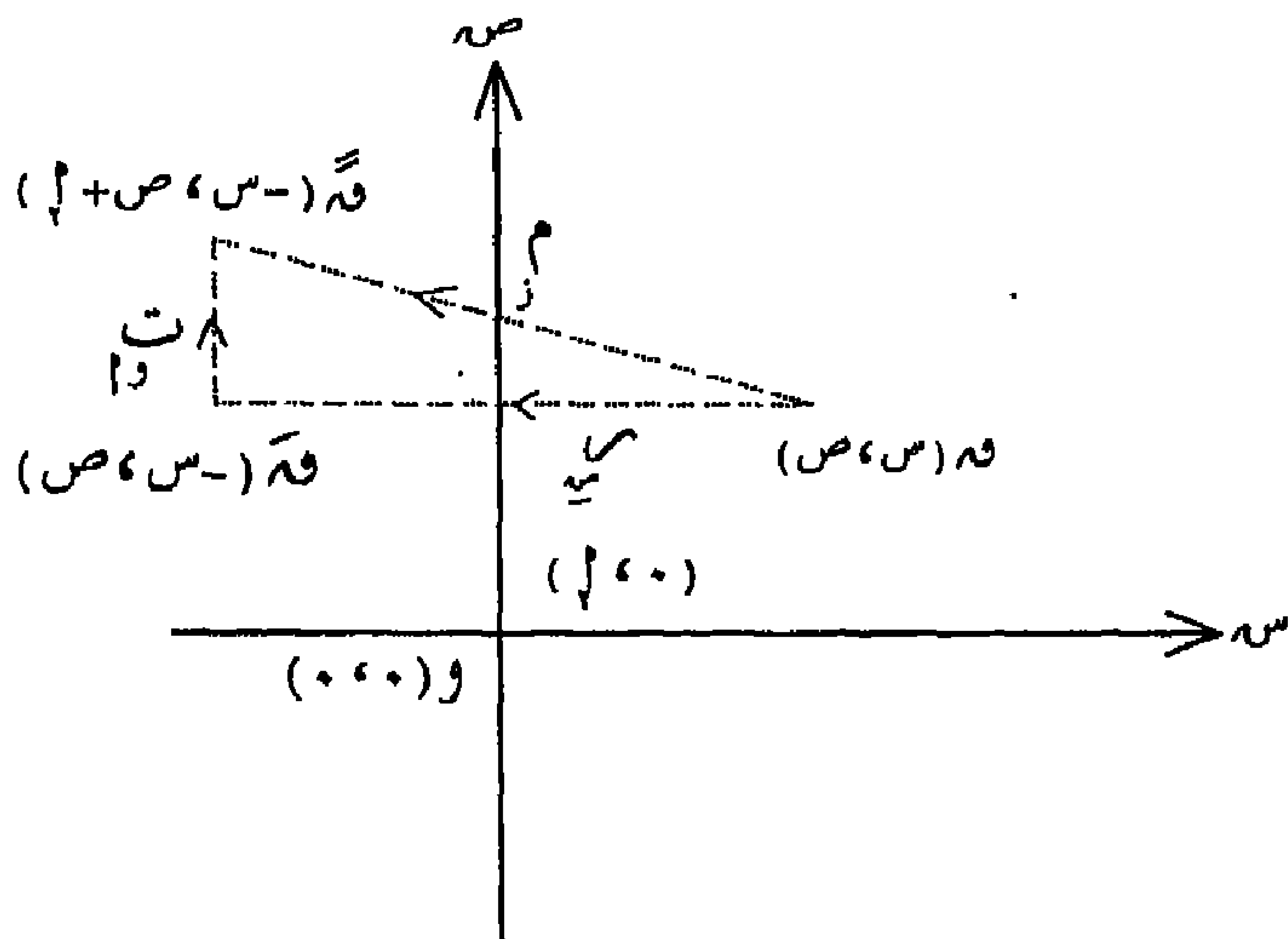
=(س+ $أ_١$ ، −ص) ∀ (س،ص) ∋ $ح^٢$

انظر الشكل (٥-١) .

أما اذا كانت أ(٠،$أ_٢$) ، و (٠،٠) نقط معطاه ، فان

$ت_{وأ}$ (س ، ص) = (س ، ص+ $أ_٢$)

$ر_{ص}$ (س ،ص) = (−س ، ص)



شكل (٥-٢)

اذن :

$$م_ز (س، ص) = (ت_{و أ} \circ س_{ص}) (س ، ص)$$

$$= ت_{و أ} (س ، ص)$$

$$= (س ، ص + أ_٢) \quad \forall (س،ص) \in ح^٢$$

انظر الشكل (٥-٢)

مثال (٢) : اذا كانت أ (-٦،٢) ، ب(-١،٧) نقط معطاه ،

$$ل = \{(س،ص) : ص = س\}$$

فأوجد $م_ز$ (١،٤) .

الحل:

$$\overleftarrow{أب} \doteq \overleftarrow{وو^*}$$

$$(-١ ،٧) - (-٦ ،٢) = (س^* ، ص^*) - (٠،٠)$$

$$(٥ ، ٥) + (س^*،ص^*) = و^*$$

اذن :

$$ت_{و أ} (س ، ص) = (س + ٥ ، ص+ ٥)$$

$$س_{ل} (س ،ص) = (ص ، س)$$

ومن ثم يكون :

$$م_ز (١،٤) = (ت_{أب} \circ س_{ل}) (١،٤)$$

$$= ت_{أب} (س_{ل}(١،٤))$$

$$= ت_{أب} (٤، ١) = (٤ +٥ ، ١+٥)$$

$$= (٩،٦)$$

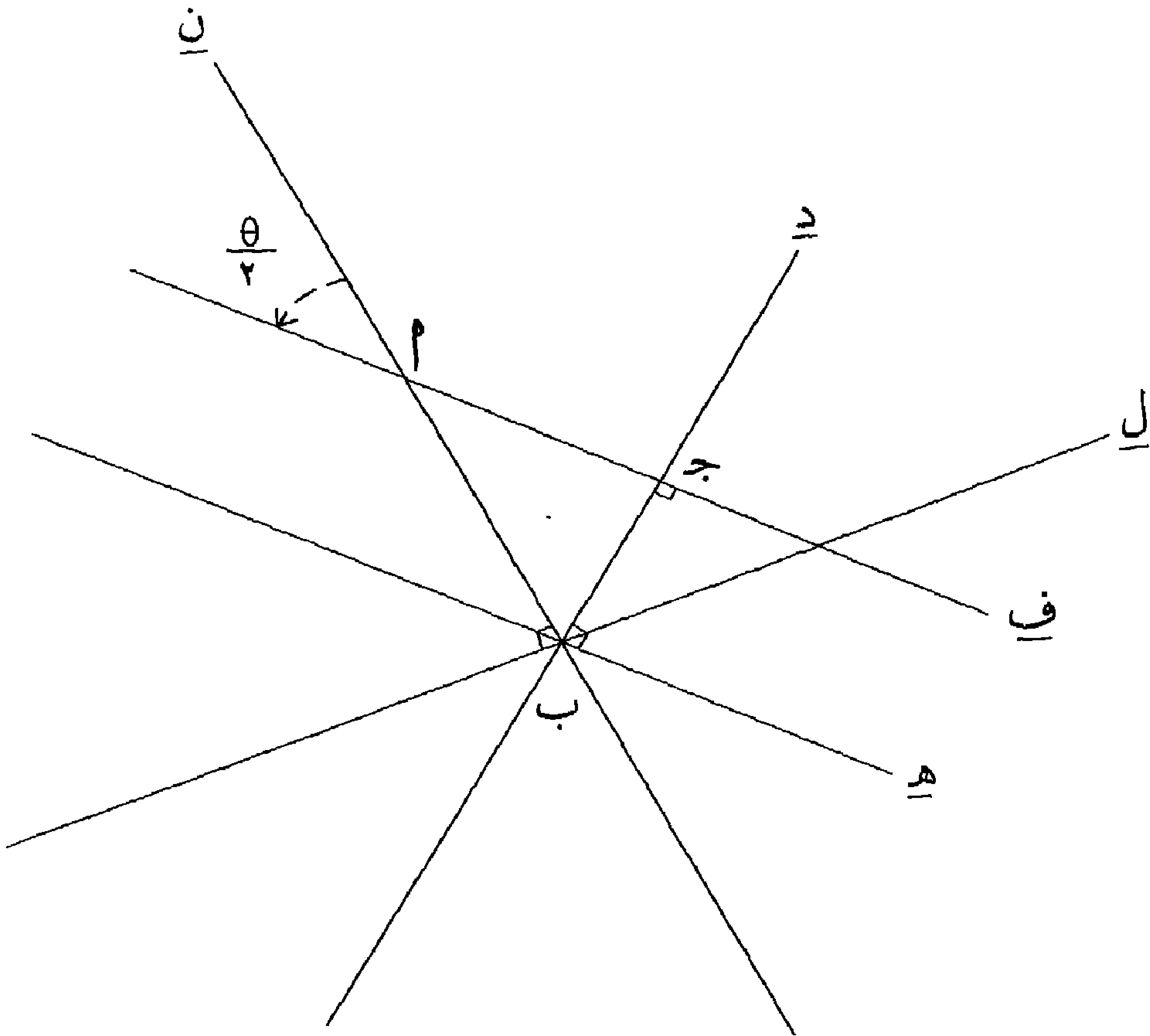
٥-٢: خواص الانعكاس الانزلاقى

حتى نتعرف على خواص الانعكاس الانزلاقى ، فاننا سنقدم بعض المفاهيم الهامه التاليه :

نظريه (١) : تحصيل انعكاس ودوران يكون انعكاساً انزلاقياً ، حيث مركز الدوران لا يقع على محور الانعكاس .

البرهان :

لنفرض أن $ر_{أ ، \theta}$ ، $ر_{ل}$ هما راسمى الدوران والانعكاس على الترتيب .لنختار الخطـــوط ن ، ف بحيث أن ن ⊥ ل ومقياس الزاويه من ن الى ف يكون $\frac{\theta}{٢}$



شكل (٥ - ٣)

اذن :

$$\text{ر}_{\text{أ}،\theta} \circ \text{س}_{\underline{\text{ل}}} = (\text{س}_{\underline{\text{ف}}} \circ \text{س}_{\underline{\text{ن}}}) \circ \text{س}_{\underline{\text{ل}}}$$

$$= \text{س}_{\underline{\text{ف}}} \circ (\text{س}_{\underline{\text{ن}}} \circ \text{س}_{\underline{\text{ل}}})$$

$$= \text{س}_{\underline{\text{ف}}} \circ \text{س}_{\text{ب}}$$

حيث $\underline{\text{ن}} \cap \underline{\text{ل}} = \{\text{ب}\}$

الآن ، لنأخذ $\underline{\text{د}}$ خط مار بالنقطه ب وعمودى على $\underline{\text{ف}}$ ، ولنأخذ $\underline{\text{هـ}}$ خط مار بالنقطه ب ومـوازى للخط $\underline{\text{ف}}$.

فى هذه الحاله ، يكون

$$\text{س}_{\text{ب}} = \text{س}_{\underline{\text{هـ}}} \circ \text{س}_{\underline{\text{د}}}$$

بالتالى :

$$\text{ر}_{\text{أ}،\theta} \circ \text{س}_{\underline{\text{ل}}} = \text{س}_{\underline{\text{ف}}} \circ (\text{س}_{\underline{\text{هـ}}} \circ \text{س}_{\underline{\text{د}}})$$

$$= (\text{س}_{\underline{\text{ف}}} \circ \text{س}_{\underline{\text{هـ}}}) \circ \text{س}_{\underline{\text{د}}}$$

بما أن $\underline{\text{هـ}} \parallel \underline{\text{ف}}$ ، فان $\text{س}_{\underline{\text{ف}}} \circ \text{س}_{\underline{\text{هـ}}}$ يكون انتقال .

اذن :

$$\text{ر}_{\text{أ}،\theta} \circ \text{س}_{\underline{\text{ل}}} = \text{ت}_{\text{٢ب جـ}} \circ \text{س}_{\underline{\text{د}}}$$

حيث

$$\underline{\text{د}} \cap \underline{\text{ف}} = \{\text{جـ}\}$$

أى أن

$\text{ر}_{\text{أ}،\theta} \circ \text{س}_{\underline{\text{ل}}}$ يكون انعكاساً انزلاقياً اذا كانت $\text{أ} \notin \underline{\text{ل}}$.

ملاحظه (١) : اذا كانت أ ∈ ل ، فان $ر_{أ،\theta} \circ س_{ل}$ يكون انعكاساً

لتوضيح ذلك ، نأخذ الخط ن ماراً بالنقطه أ بحيث أن مقياس الزاويه من ل الى ن يكون $\frac{\theta}{٢}$

اذن: $ر_{أ،\theta} \circ س_{ل} = (س_{ن} \circ س_{ل}) \circ س_{ل}$

$= س_{ن} \circ (س_{ل} \circ س_{ل}) = س_{ن} \circ I = س_{ن}$

نتيجه (١) : اذا كانت أب قطعه مستقيمه غير عمودية على خط معطى ل ، فان تحصيل إنتقال $ت_{\overrightarrow{أب}}$ وانعكاس $س_{ل}$ يكون انعكاساً انزلاقياً .

نتيجه (٢) : إذا كان ل ، ن ، هـ خطوط غير متقاطعه فى نقطه واحده بحيث أن ن لايوازى ل ، هـ لايوازى ل ؛ فان $س_{ل} \circ س_{ن} \circ س_{هـ}$ يكون انعكاسا انزلاقيا .

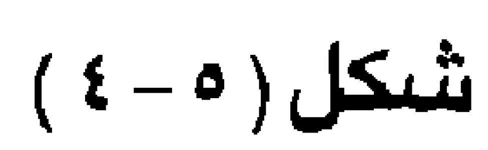
* علينا ملاحظه أنه اذا كان س انعكاس انزلاقى ، ق' = س(ق) لأى نقطه ق ، فان محور الانعكاس الانزلاقى يحتوى على نقطه المنتصف للقطعه المستقيمه $\overline{قق'}$.

بناء على ذلك ، اذا كانت ق' ، ك' صوره للنقط ق ،ك ؛ فان الخط المار بمنتصفات قق' ، كك' يكون هو محور الانعكاس الانزلاقى .

وعلى سبيل المثال ، لنأخذ الراسم $س_{ل} \circ س_{ن} \circ س_{هـ}$ (شكل ٥-٤) .

من السهل تعيين موضع كل من أ ، جـ تحت تأثير $س_{ل} \circ س_{ن} \circ س_{هـ}$

اذا كان ف هو الخط المار بالنقط س ، ص حيث س منتصف $\overline{أأ'}$ ، ص منتصف $\overline{جـجـ'}$ ، فانه ينتج أن ف هو محور الانعكاس الانزلاقى ، ويكون



شكل (٥ – ٤)

ر ل ٥ ر ب ٥ ر هـ = ت دع ٥ ر ف

حيث $\overleftarrow{\text{دع}}$ ≐ $\overleftarrow{\text{حـ* حـ'}}$ ، حـ* = ر ب (جـ) .

وفيما يلى نجمل خواص الانعكاس الانزلاقى :

١ - الانعكاس الانزلاقى تحويله هندسيه (مستويه) .

٢- الانعكاس الانزلاقى تساوى قياسى .

٣-الانعكاس الانزلاقى يحفظ مقياس الزوايا .

٤-الانعكاس الانزلاقى يحفظ استقامة النقط والبينيه والتوازى.

٥-الانعكاس الانزلاقى تحويله مضادة .

٦- الانعكاس الانزلاقى ليس له نقطه ثابته .

٥-٣ وحدانيه التساويات القياسيه

دعنا نرى ماذا يحدث لو أننا حصلنا انعكاس انزلاقى مع انتقال . ليكن $م_ر$ انعكـــاس انزلاقـــى محوره ل بحيث أن $م_ر = ت_{اب} \circ س_{\underline{ل}}$ حيث $\overleftarrow{اب} // \underline{ل}$ ، وليكن $ت_{جد}$ أى إنتقال .

اذن :

$$ت_{جد} \circ م_ر = ت_{جد} \circ (ت_{اب} \circ س_{\underline{ل}})$$

$$= (ت_{جد} \circ ت_{اب}) \circ س_{\underline{ل}}$$

ولكن تحصيل إنتقالين هو إنتقال (الانتقال يحقق خاصيه الانغلاق) .

أىأن :

$$ت_{جد} \circ ت_{اب} = ت_{هف}$$

بالتالى :

$$ت_{جد} \circ م_ر = ت_{هف} \circ س_{\underline{ل}}$$

اذا كان $\overleftarrow{هــ ف} \perp \underline{ل}$ ، فان $ت_{هف} \circ س_{\underline{ل}}$ يكون انعكاساً محوره موازياً للخط $\underline{ل}$.

واذا كان $\overrightarrow{هـ ف} \nparallel \underline{ل}$ ، فان $ت_{هـ د} \circ ر_{\underline{ل}}$ يكون انعكاساً انزلاقياً (باستخدام نتيجه (١)

لذلك فان $ت_{جـ د} \circ م_{ز}$ يكون انعكاساً أو انعكاساً انزلاقياً

(نفس النتيجه تتحقق بالنسبه الى $م_{ز} \circ ت_{جـ د}$) .

مما سبق نستخلص أن : تحصيل انعكاس انزلاقى وإنتقال إما أن يكون انعكاساً أو إنعكاساً انزلاقياً .

ولندرس الآن تحصيل انعكاس انزلاقى وانعكاس .

ليكن

$م_{ز} = ت_{اب} \circ ر_{\underline{ل}}$ ؛ $ر_{\underline{ن}}$ انعكاس محور $\underline{ن}$.

اذن:

$$ر_{\underline{ن}} \circ م_{ز} = ر_{\underline{ن}} \circ (ت_{اب} \circ ر_{\underline{ل}})$$
$$= ر_{\underline{ن}} \circ (ر_{\underline{ل}} \circ ت_{اب})$$
$$= (ر_{\underline{ن}} \circ ر_{\underline{ل}}) \circ ت_{اب}$$

اذا كان $\underline{ن} // \underline{ل}$ ، فان $ر_{\underline{ن}} \circ ر_{\underline{ل}}$ هو إنتقال ، وبالتالى يكون $ر_{\underline{ن}} \circ م_{ز}$ **انتقالاً** .

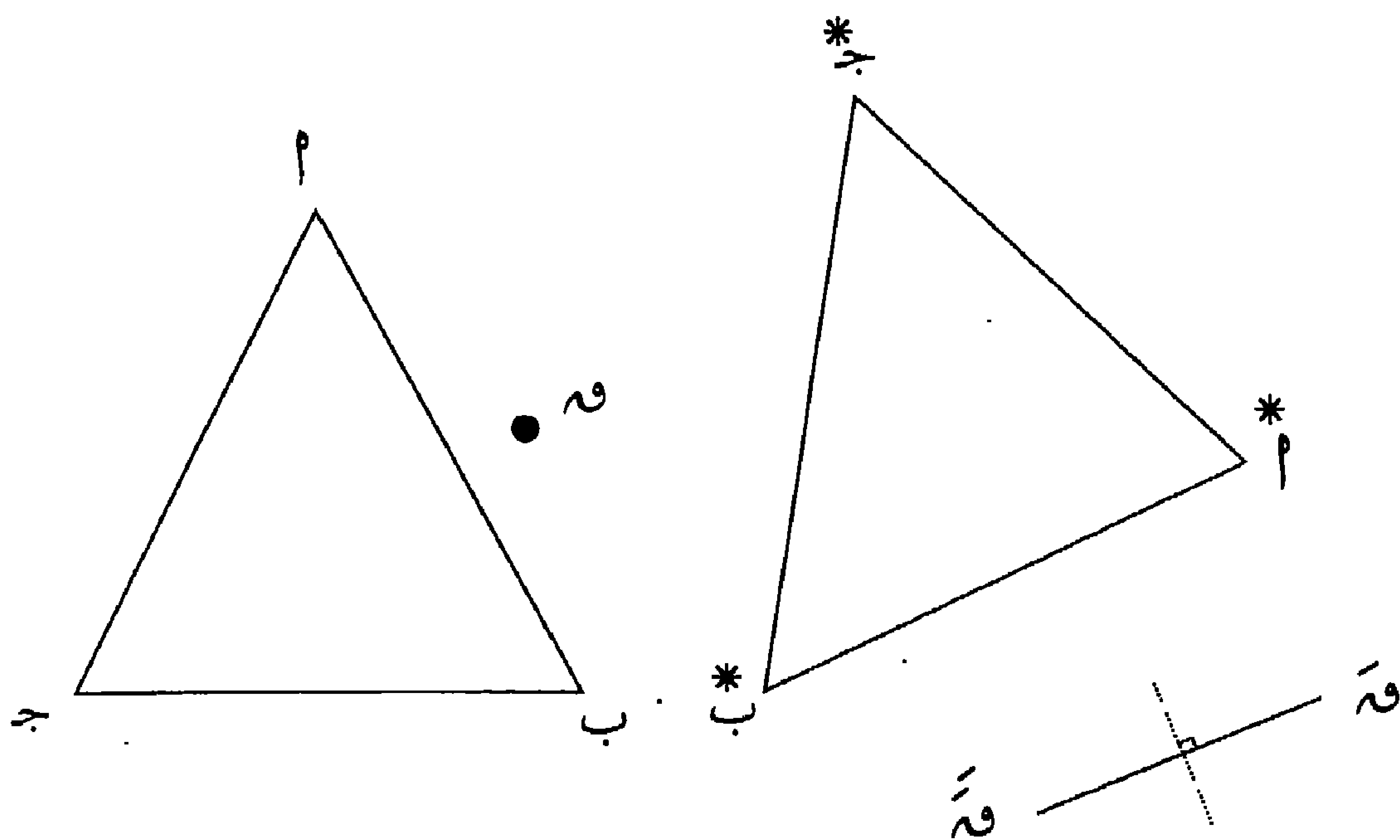
واذا كان $\underline{ن}$ لايوازى $\underline{ل}$ ، فان $ر_{\underline{ن}} \circ ر_{\underline{ل}}$ هو دوران . لكن تحصيل دوران وانتقال هـو دوران (لماذا ؟) .

من هذا ينتج أن $ر_{\underline{ن}} \circ م_{ز}$ **دوران** .

مره آخرى ، النتيجه تتحقق بالنسبه الى $م_{ز} \circ ر_{\underline{ن}}$.

وبصفه عامه نقول أن : تحصيل انعكاس انزلاقى وانعكاس إما أن يكون انتقالاً أو دوراناً .

نظريه (٢) : لتكن أ ، ب ، جـ ثلاث نقط غير واقعه على استقامه واحـــده ؛أ*، ب* ،جـــ* ثلاث نقط آخرى .أذن يوجد على الاكثر تساوى قياسى واحد يرسل أ فوق أ* ،ب فوق ب* ،جـــ فوق جــ*



شكل (٥ - ٥)

البرهان :

نفرض أن ت$_1$،ت$_2$ تساويات قياسيه بحيث أن :

ت$_1$(أ) = أ* = ت$_2$(أ)

ت$_1$(ب) =ب* = ت$_2$(ب)

ت$_1$(جـ) = جـ* = ت$_2$(جـ)

المطلوب اثبات أن :

ت$_1$(ق) = ت$_2$(ق) ، $\forall$ ق .

بما أن ت$_1$ ، ت$_2$ تساويات قياسية ،فان

أ ب = أ*ب* ، أجـ = أ*جـ* ، ب جـ = ب*جـ* .

بما أن أ ، ب ، جـ نقط غير واقعه على استقامه واحده ؛ فان أ* ، ب* ، ج* نقط غير واقعه على استقامه واحده (لماذا؟) .

لنفرض أن ت$_1$(ق) ≠ ت$_2$(ق) .

اذن ، اذا كانت ق$'$ = ت$_1$(ق) ، ق$''$ = ت$_2$(ق) ؛ فان

ق أ = ق$'$ أ* = ق$''$ أ* لان ت$_1$،ت$_2$ تساويات قياسيه .

لكن المنصف العمودى للقطعه المستقيمه هو مجموعه كل النقط التى تبعد عن طرفى القطعه المستقيمه بأبعاد متساويه .

وعليه ، فان أ* تقع على المنتصف العمودى للقطعه المستقيمه ق$'$ق$''$.وبنفس الطريقه نجد أن النقط ب*،جـ* تقع على المنتصف العمودى للقطعه المستقيمه ق$'$ق$''$.

ولكن هذا يعارض حقيقه أن النقط أ*،ب*،جـ* غير واقعه على استقامه واحده. من هذا التعارض نستنتج أن :

ت$_1$ (ق) = ت$_2$ (ق) ، أى أن ت$_1$=ت$_2$.

نظريه (٣) : اذا كان ل خط مار بنقطه الأصل ؛ واذا كان

$م_{ل}$ (١،٠) = (أ،ب) ،فان

$م_{ل}$ (ق) = (أ س + ب ص ، ب س – أ ص) .

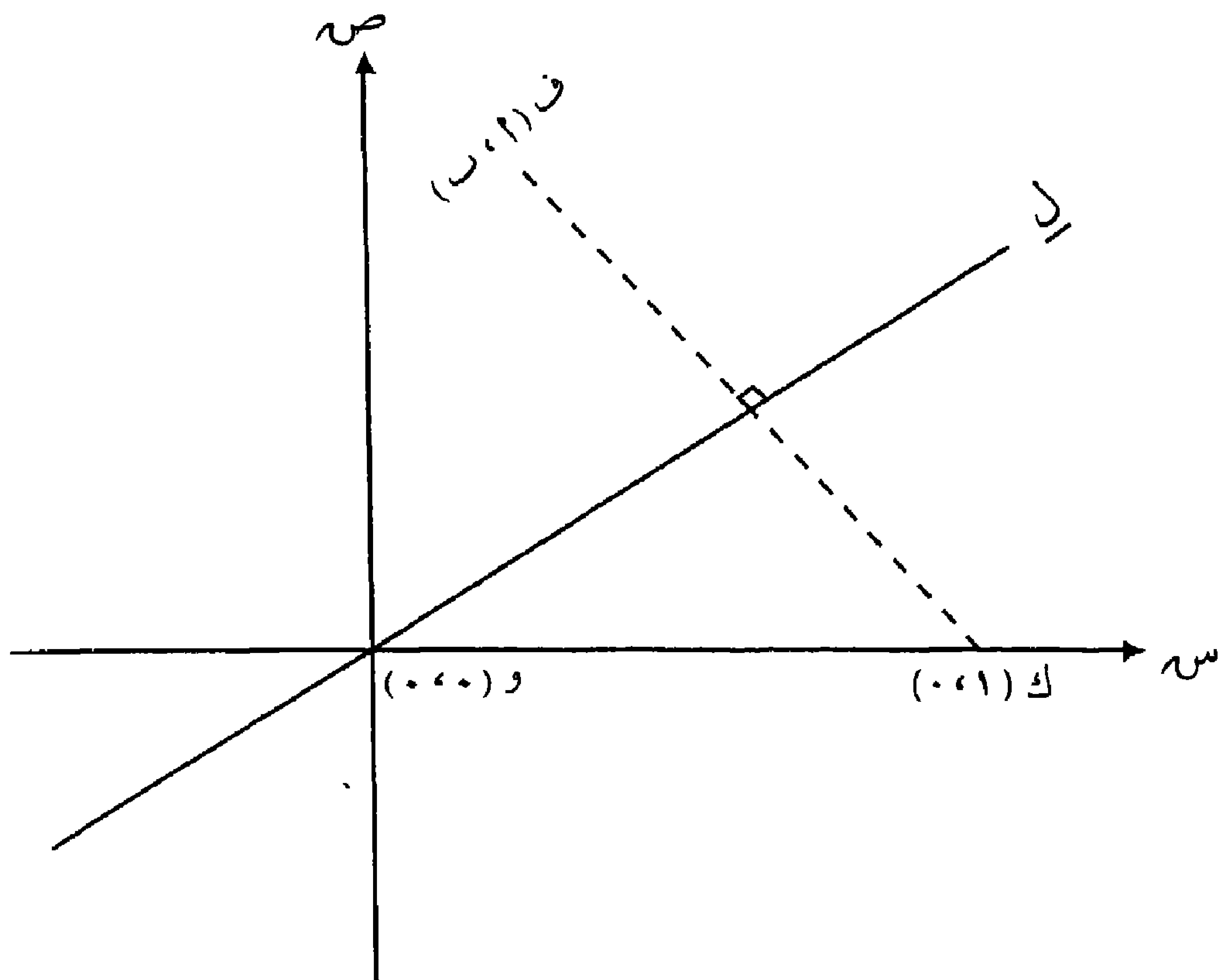
البرهان :

نفرض أن

ت(ق) = (أس + ب ص ، ب س − أ ص)

ثم نثبت أن **ت** = $سا_{ل}$

(باستخدام نظريه (٢)) .



شكل (٥-٦)

أولا ، سنثبت أن **ت** تساوى قياسي وذلك باخذ $ق_{١}$($س_{١}$،$ص_{١}$) ، $ق_{٢}$($س_{٢}$،$ص_{٢}$) أى نقطتين .

اذن :

$ق^{*}_{١}$ = ت($ق_{١}$)

= (أ $س_{١}$+ ب $ص_{١}$ ، ب $س_{١}$ − أ $ص_{١}$) ؛

$ق^{*}_{٢}$ = ت($ق_{٢}$)

$= (أس_2 + ب ص_2 ، ب س_2 - أص_2)$.

باستخدام قانون البعد نجد أن :

$$(\bar{ق}^*_1 \bar{ق}^*_2)^2 = [(أس_1 + ب ص_1) - (أ س_2 + ب ص_2)]^2$$
$$+ [(ب س_1 - أ ص_1) - (ب س_2 - أ ص_2)]^2$$

$$= [أ(س_1 - س_2) + ب(ص_1 - ص_2)]^2 + [ب(س_1 - س_2) - أ(ص_1 - ص_2)]^2$$

$$= (أ^2 + ب^2)(س_1 - س_2)^2 + (أ^2 + ب^2)(ص_1 - ص_2)^2$$

لكن

$ف = س_{\underline{ل}}(ك)$ ، $س_{\underline{ل}}(و) = و$ ، $\overline{وف} = \overline{وك}$

وحيث أن

$\overline{وك} = ١$ ، $\overline{وف} = \sqrt{أ^2 + ب^2}$

فان

$$أ^2 + ب^2 = ١$$

بالتالى فان

$$\bar{ق}^*_1 \bar{ق}^*_2 = \sqrt{(١)(س_1 - س_2)^2 + (١)(ص_1 - ص_2)^2} = \overline{ق_1 ق_2}$$

أى أن **ت** تساوى قياسى .

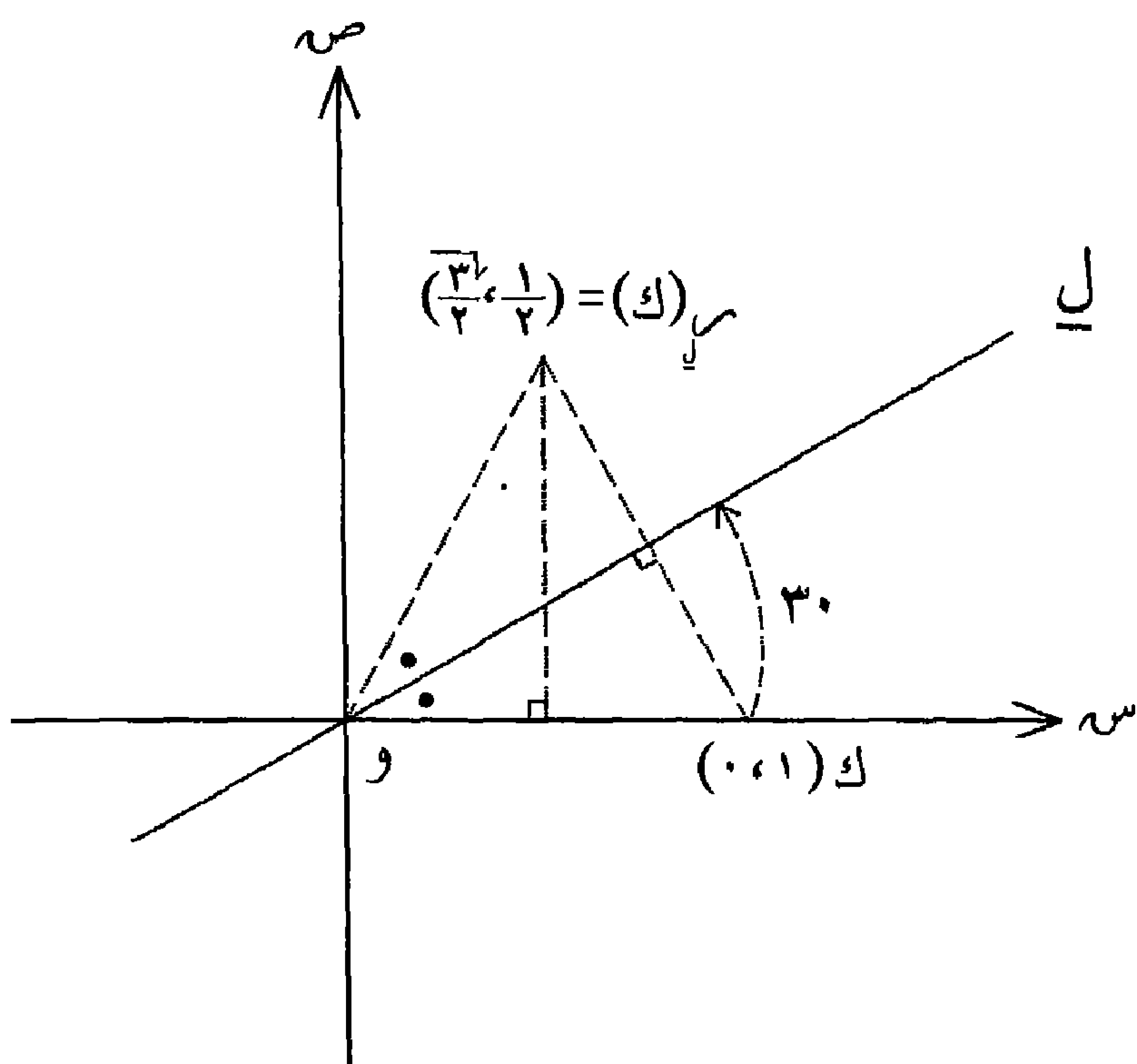
الآن :

$$ت\,(و) = (٠،٠)$$
$$ت\,(ك) = (أ، ب)$$
$$ت\,(ف) = (أ.أ + ب.ب ، ب.أ - أ.ب)$$
$$= (أ^2 + ب^2 ، .) = (١،٠)$$

بما أن $و \in \underline{ل}$ ، $س_{\underline{ل}}(و) = و$ ، وبما أن $س_{\underline{ل}}(ك) = ف$ ، $س_{\underline{ل}}(ف) = ك$ ؛ فان كل

من $م_ل$ ، ت رواسم تساوى قياسى ترسل النقط و ،ك ،ف التى لاتقع على استقامه واحده فوق و ، ف، ك على الترتيب .ومن نظريه (٢) نستنتج أن $م_ل$ = ت .

مثال (٣) : اذا كانت و نقطه الأصل ، ق (س،ص) أى نقطه ، فأوجد صوره النقطه ق تحت تأثير الراسم $م_{ل،٦٠}$



شكل (٥-٧)

الحل

لنفرض أن ل خطا مارا بالنقطه و بحيث أن مقياس الزوايه من المحور السـ‍ـــينى الى ل هى ٣٠ . من شكل (٥-٧) يتضح لنا :

$$ر_{ل}\,(١،٠) = \left(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) .$$

بالتالى :

$$ر_{ل}\,(ق) = \left(\frac{١}{٢}س + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ص ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}س - \frac{١}{٢}ص\right)$$

لكن ، اذا كان م هو المحور السينى ، فان

$$ر_{و،٦٠}\,(ق) = (ر_{ل} \circ ر_{م})\,(ق)$$

$$= ر_{ل}\,(ر_{م}\,(ق))$$

$$= ر_{ل}\,(س ، - ص)$$

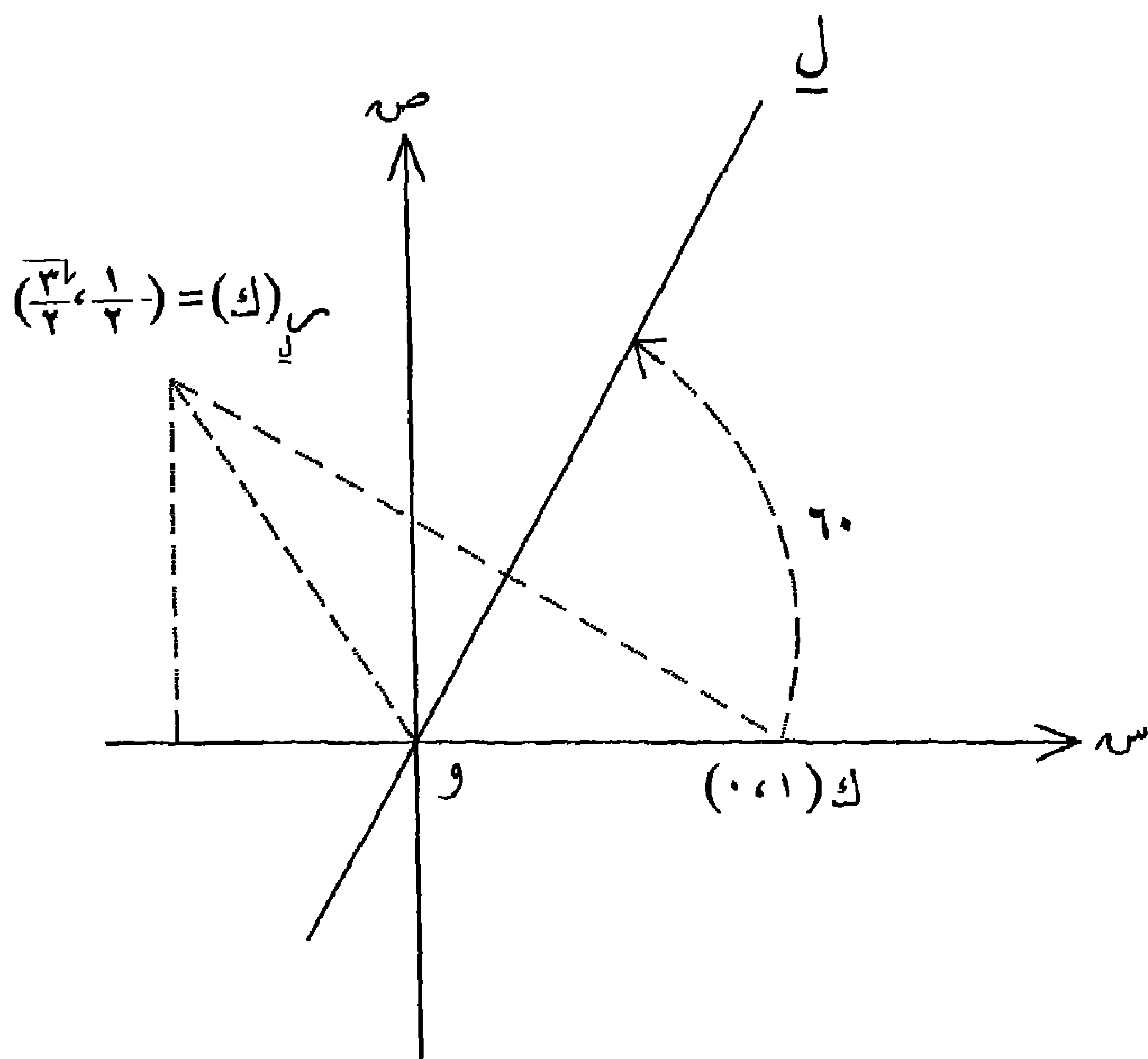
$$= \left(\frac{١}{٢}س - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ص ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}س + \frac{١}{٢}ص\right)$$

* **ملاحظه (٢)** : اذا كان $ر_{و،\theta}$ راسم دوران حول نقطه الأصل ، يرسل النقطه ك (١،٠) فوق النقطه ف (أ ، ب) ؛ فان

$$ر_{و،\theta}\,(ق) = (أ س - ب ص ، ب س + أ ص) \quad ، \quad \forall\, ق (س ، ص) .$$

مثال (٤) : أوجد صوره النقطه (١،٢) تحت تأثير الراسم $ر_{(و،١٢٠)}$ حيث و= (٠،٠) .

الحل :



شكل (٥-٨)

لنفرض أن ل خطاً ماراً بنقطه الأصل وبحيث أن مقياس الزاويه من المحور السيني الى ل هو ٦٠ . من شكل (٥-٨) يتضح لنا :

$$ر_{ل} (١،٠) = (-\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$$

بالتالى :

$$\sim_{ل}(\mathbf{ق}) = \left(-\frac{1}{2}س+\frac{\sqrt{3}}{2}ص \text{ ، } \frac{\sqrt{3}}{2}س+\frac{1}{2}ص\right)$$

(وهذه هى نفس النتيجه التى حصلنا عليها فى مثال (١٧) بالباب الثانى).

بالتالى :

$$\sim_{و،١٢٠} = \sim_{\underline{ل}} \circ \sim_{\underline{س}}$$

اذن

$$\sim_{و،١٢٠}(\mathbf{ق}) = (\sim_{\underline{ل}} \circ \sim_{\underline{س}})(\mathbf{ق}) = \sim_{\underline{ل}}(\sim_{\underline{س}}(س،ص))$$

$$= \sim_{\underline{ل}}(س،-ص)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}س-\frac{\sqrt{3}}{2}ص \text{ ، } \frac{\sqrt{3}}{2}س-\frac{1}{2}ص\right)$$

وبالتالى :

$$\sim_{و،١٢٠}(١،٢) = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(٢) \text{ ، } \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}(٢)\right) = \left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3} \text{ ، } \sqrt{3}-١\right)$$

$$= (-٢,٢٣ ، ٠,٧٣)$$

نظريه(٤) : اذا كانت $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ قطع مستقيمه متطابقه ، فانه يوجد إثنـــان مـــن التساويات القياسيه يرسلان أ فوق جـ ، ب فوق د أحدهما مباشر والآخر مضاد .

البرهان :

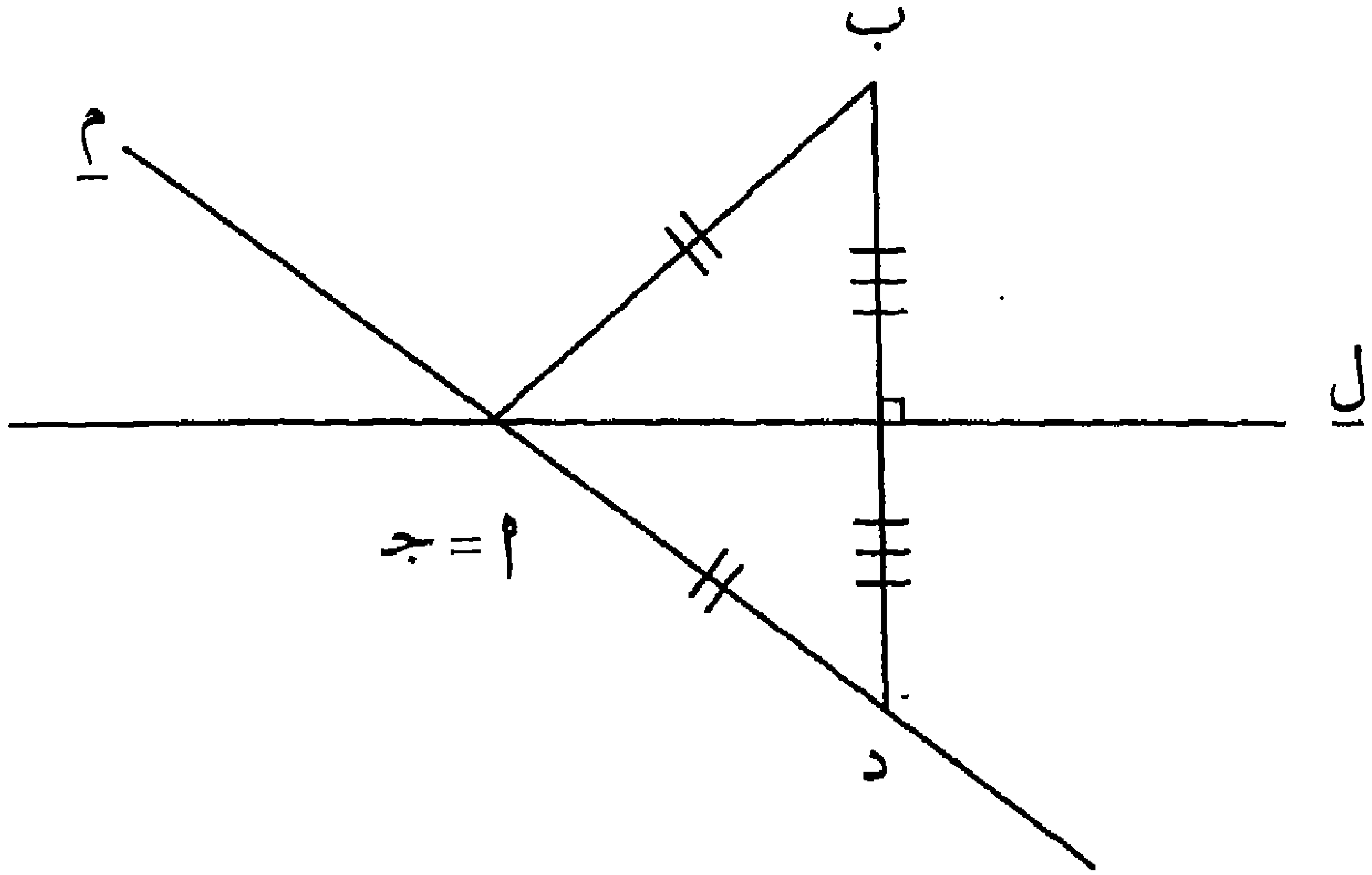
برهان هذه النظريه يتطلب منا دراسه الاحتمالات التاليه :

١- أ = جـ ، ب ≠ د

٣- أ ≠ جـ ، ب ≠ د

٣- أ = جـ ، ب = د

(لاحظ أن الاحتمال أ ≠ جـ ، ب = د هو نفسه الاحتمال الأول) .



شكل (٥ - ٩)

أولاً : لنفرض أن أ = جـ ، ب ≠ د،ليكن ل هو المنصف العمودى للقطعه المستقيمه ب د .

بما أن أ = جـ ، أب = ب جـ ، فان أب = أد ومن ثم يكون أ ∈ ل .

(أى نقطه تبعد عن طرفى قطعه مستقيمه بمسافه متساويه ، تقع على المنصف العمودى لهـــذه القطعــه المستقيمه) .

ذن :

$سا_{ل}$ (أ) = أ = جـ ، $سا_{ل}$ (ب) = د

وللحصول على التساوى القياسى الثانى ، فاننا نأخذ م = $\overleftrightarrow{جـ د}$.

أذن :

($سا_{م}$ ο $سا_{ل}$) (أ) = $سا_{م}$ ($سا_{ل}$(أ)) = $سا_{ل}$(جـ)=جـ ،

($سا_{م}$ ο $سا_{ل}$) (ب) = $سا_{م}$ ($سا_{ل}$(ب)) = $سا_{ل}$(د)=د

من هذا يتضح أن $سا_{ل}$ هو التساوى القياسى المضاد بينما $سا_{م}$ ο $سا_{ل}$ هو التساوى القياسى المباشر .

ثانيا : لنفرض أن أ ≠ جـ ، ب ≠ د. لنأخذ ل هو المنصف العمودى للقطعه المستقيمه $\overline{أجـ}$.

واضح أن :

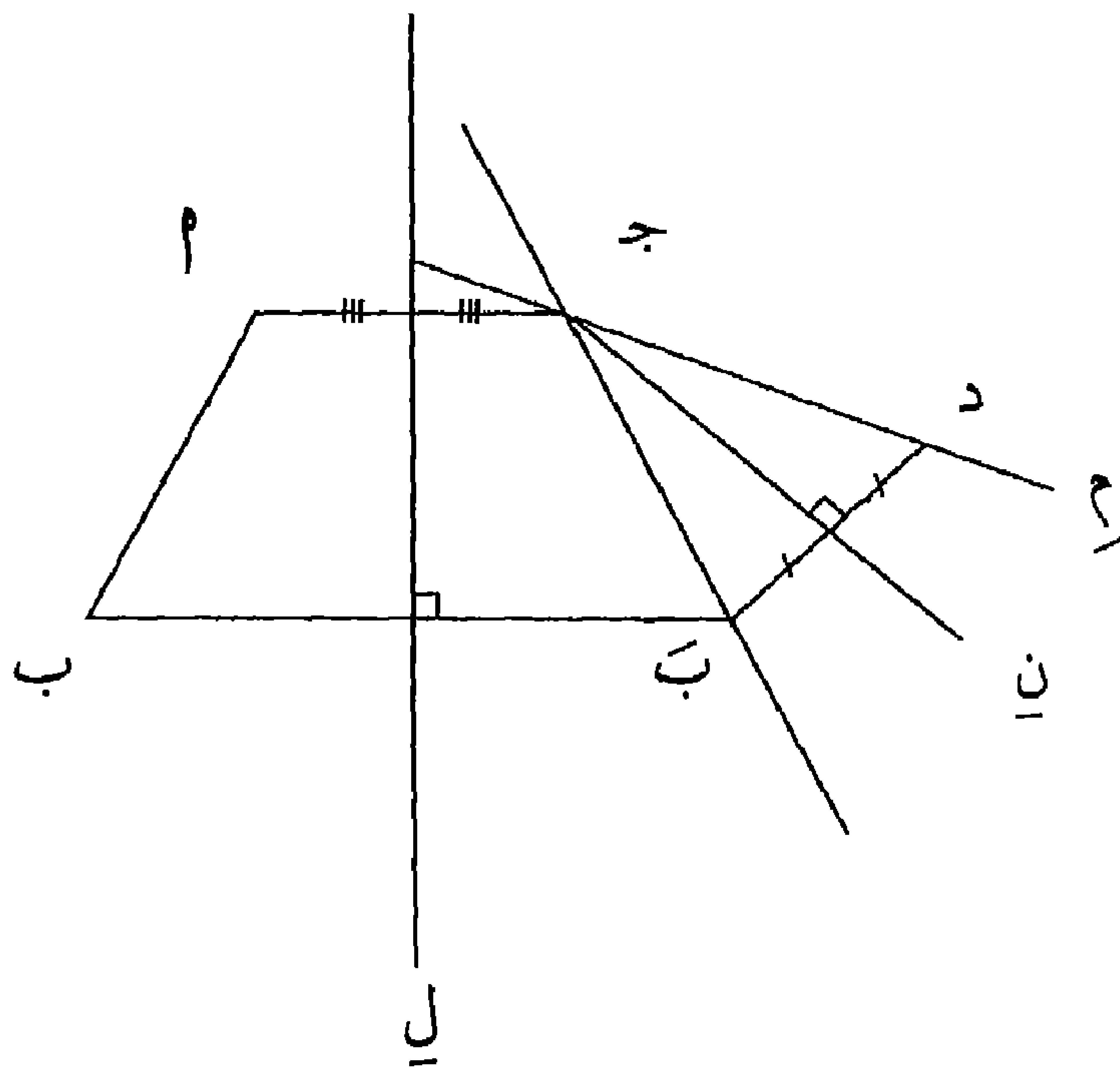
$سا_{ل}$ (أ) = جـ اذا أخذنا ب = $سا_{ل}$ (ب) فاننا نلاحظ وجود احتمالين : إما ب=د (أسفل شكل (٥-١٠)) أو ب ≠ د (أعلى شكل(٥-١٠)) .

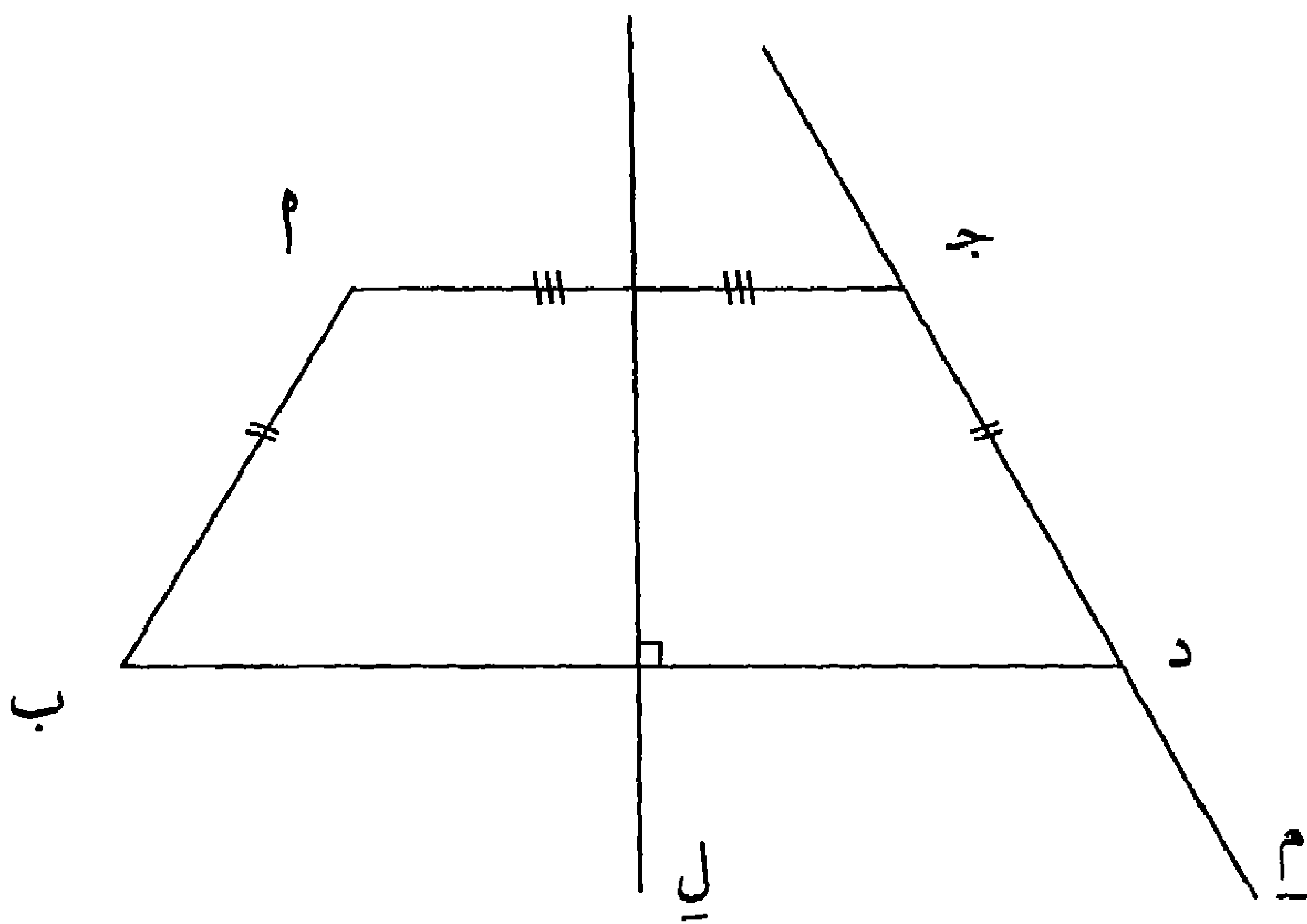
اذا كانت ب=د ، فان $سا_{ل}$ هو التساوى القياسى المضاد

الآن ، نفرض أن م = $\overleftrightarrow{جـ د}$. بالتالى فان $سا_{م}$ ο $سا_{ل}$ هو التساوى القياسى المباشر .

على الجانب الآخر ، اذا كانت ب ≠ د ،فاننا نأخذ ن كمنصف عمودى للقطعه المستقيمه $\overline{ب د}$. نحن نعلم أن جـ ∋ ن لأن $\overline{جـ د}$ = $\overline{أب}$ = $\overline{ج ب}$.

اذن $سا_{ن}$ (جـ) = جـ ، $سا_{ن}$ (ب) = د





شكل (٥-١٠)

بالتالى ،فان $\sigma_{ن} \circ \sigma_{ل}$ هو التساوى القياسى المباشر .

أخيراً ،لنأخذ مره آخرى $\underline{م} = \overleftrightarrow{جـ\,د}$. نلاحظ أن

$$(\sigma_{م} \circ \sigma_{ن} \circ \sigma_{ل})\,(أ) = جـ \quad ،$$

$$(\sigma_{م} \circ \sigma_{ن} \circ \sigma_{ل})\,(ب) = د$$

من هذا نستنتج أن $(\sigma_{م} \circ \sigma_{ن} \circ \sigma_{ل})$ هو تساوى قياسى مضاد .

ثالثاً : لنأخذ أ = جـ ، ب = د ، $\underline{ل} = \overleftrightarrow{أب}$.

واضح أن :

$$\sigma_{ل}\,(أ) = أ = جـ \quad ،$$

$$I = (\sigma_{ن} \circ \sigma_{ل})(ب) = د \;.$$

فى كل الحالات السابقه ، برهان على وجود زوجان من التساويات القياسيه يرســـلان أ فـــوق جـ ، ب فوق د . التساوى القياسى المباشر عباره عن تحصيل انعكاسين ؛ التساوى القياسى المضاد إمـا أن يكون انعكاساً وإما أن يكون تحصيلاً لثلاثه انعكاسات .

نظريه (٥) (النظريه الأساسيه للتساوى القياسى) :

التساوى القياسى يكون تحصيلاً لثلاثه انعكاسات على الاكثر .

البرهان :

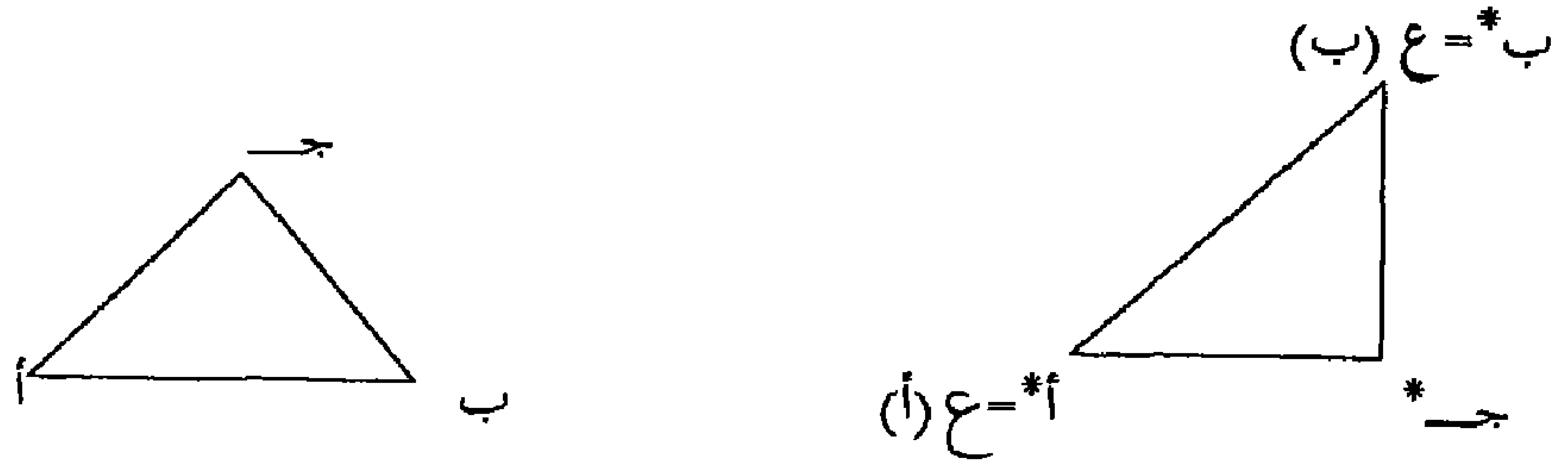
لنفرض أن **ت** تساوى قياسى ؛ أ ، ب ، جـ ثلاث نقط غير واقعه على استقامه واحــده ، وليكن أ* = **ت**(أ) ، ب*=**ت**(ب) ، جـ*=**ت** (جـ) .

حيث أن $\overline{أ^*ب^*}$ ، $\overline{أب}$ قطع مستقيمه متطابقه ،فمن نظريتنا السابقه ، نجد أنه يوجد إثنان من التسـلويات القياسيه يرسلان أ فوق أ* ، ب فوق ب* أحدهما مباشر $ت_{ش}$ والآخر مضاد $ت_{ض}$.

$\text{ت}_{\text{ش}}$ هو تحصيل لانعكاسين $\text{ر}_{\text{م}} \circ \text{ر}_{\text{ل}}$ بينما $\text{ت}_{\text{ض}}$ إما أن تكون انعكاسا $\text{ر}_{\text{ل}}$ أو تحصيلا لثلاثه انعكاسات $\text{ر}_{\text{م}} \circ \text{ر}_{\text{ن}} \circ \text{ر}_{\text{ل}}$.

لنأخذ ع = $\text{ت}_{\text{ض}}$ اذا كان $\text{ت}_{\text{ض}} = \text{ر}_{\text{ل}}$ ، ولكننا نأخذ ع = $\text{ت}_{\text{ش}}$

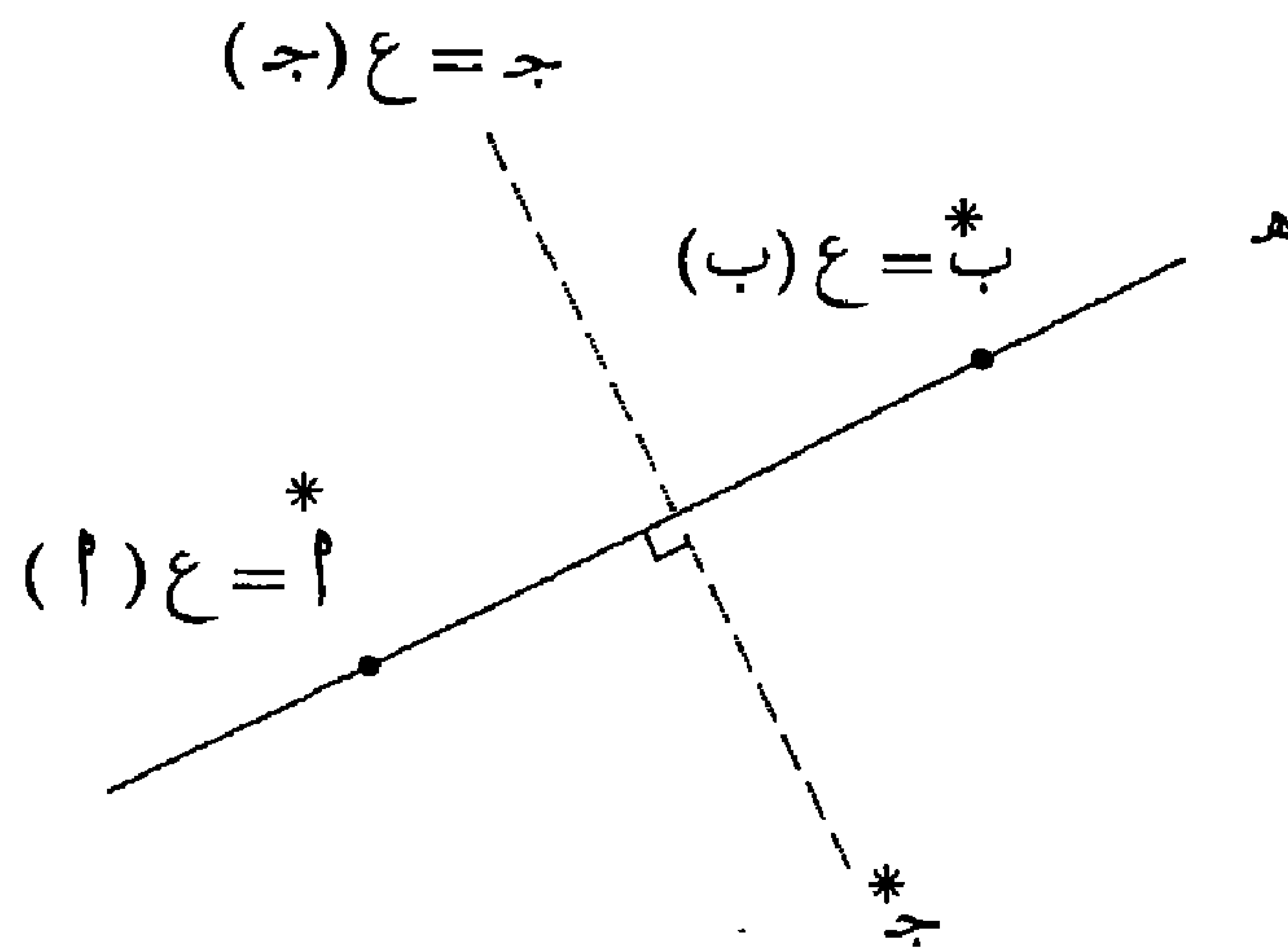
اذا كان $\text{ت}_{\text{ض}} = \text{ر}_{\text{م}} \circ \text{ر}_{\text{ن}} \circ \text{ر}_{\text{ل}}$.



شكل (٥-١١)

لنعتبر جـ =ع (جـ) .

اذا كانت جـ = جـ* ، فان ع ترسل أ فوق أ* ، ب فوق ب* ، جـ فوق جـ*.



شكل (٥-١٢)

باستخدام نظريه (٢) ، نجد أن ت = ع.

الآن، نفرض أن جَـ ≠ جـ* ، ولنأخذ $\underline{\text{هـ}} = \overleftrightarrow{\text{أ*ب*}}$

بما أن ت ، ع تساويات قياسيه ، فان

$$\overline{\text{أجـ}} = \overline{\text{أ*ب*}} = \overline{\text{أ* جَـ}} ،$$

$$\overline{\text{ب جـ}} = \overline{\text{ب*جـ*}} = \overline{\text{ب*جَـ}} .$$

اذن ، النقطتان أ*، ب* يكونان على بعد متساوى من طرفى القطعه المستقيمه $\overline{\text{جَـ جـ*}}$. هذا يعنى أن $\overleftrightarrow{\text{أ*ب*}}$ هو المنصف العمودى للقطعه المستقيمه $\overline{\text{جَـ جـ*}}$.

وبالتالى فان

سهـ (جَـ) = جـ*

لهذا ،فان

(سهـ ∘ ع) (أ) = سهـ (ع (أ)) = سهـ (أ*) = أ* ،

(سهـ ∘ ع) (ب) = سهـ (ع (ب)) = سهـ (ب*) = ب* ،

(سهـ ∘ ع) (جـ) = سهـ (جـ') = جـ* ،

مرة آخرى ، باستخدام نظريه (٢) نجد أن

سهـ ∘ ع = ت

اذن ،إما :   ت = (م هـ ∘ ع)   أو   ت = ع .

لكن ع تكون إما إنعكاس أو تحصيل انعكاسين . من هذا نستنتج أن ت تكون تحصيلاً لثلاثه انعكاسات على الاكثر .

نتيجه (٣) : التساوى القياسى ، إما أن يكون انعكاساً ، انتقالاً ،دوراناً ، أو انعكاساً إنزلاقياً .

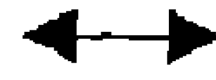
نظريه (٦) : إذا كان Δ أب جـ ≅ Δ أ* ب*جـ* ، فانه يوجد تساوى قياسى واحد وفقط واحد يرسل أ فوق أ* ، ب فوق ب* ، جـ فوق جـ* .

البرهان :

ليكن ت تساوى قياسى يرسل أ فوق أ* ، ب فوق ب* (لأن أب = أ*ب*) .

الآن ، لنأخذ جَـ = ت (جـ) .

لتكن جَـ = جـ* معطاه (لأن ت (أ) = أ* ، ت (ب) = ب*) .



اذا كانت جَـ ≠ جـ* ، ن = أ*ب* .

اذن ، ن هو المنصف العمودى للقطعه المستقيمه جَـ جـ* (لأن كل من النقط أ* ،ب* تبعد بمسافه متساويه عن نهايتى القطعه المستقيمه جَـ جـ* .

لهذا يكون :   م ن (جَـ) = جـ*

بالتالى فان

(م ن ∘ ت) (أ) = م ن (أ*) = أ* ،

(م ن ∘ ت) (ب) = م ن (ب*) = ب* ،

(م ن ∘ ت) (جـ) = م ن (جَـ) = جـ* .

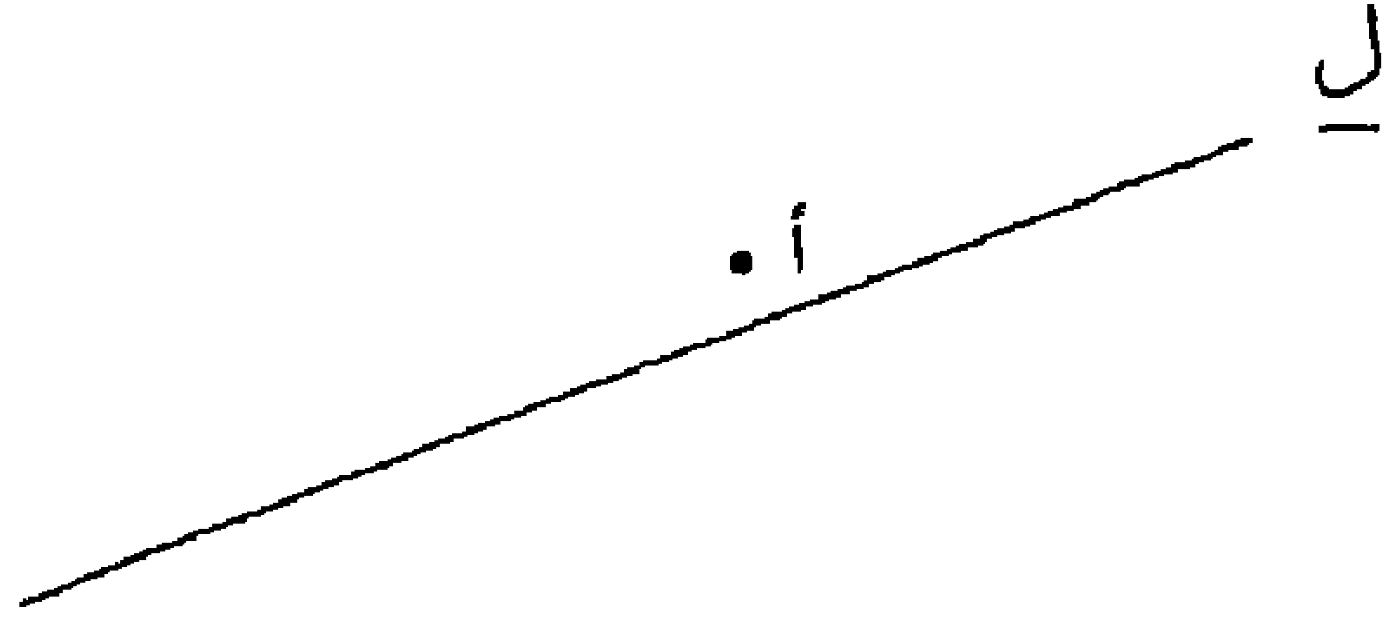
وبهذا نكون قد برهنا على وجود تساوى قياسى (إما أن يكون ت أو ىں ن ο ت) يرسل

Δ أب جـ فوق Δأ*ب*جـ* .

تعريف : يقال لمجموعتين أنهما متطابقتان اذا واذا فقط وجد تساوى قياسى يرسل إحـــدى المجموعتـين فوق الآخرى .

تمارين عامه

١-اذا كانت أ ∉ ل . فبين محور الانعكاس الانزلاقى $ر_{ل} \circ ر_{أ ، ٩٠}$

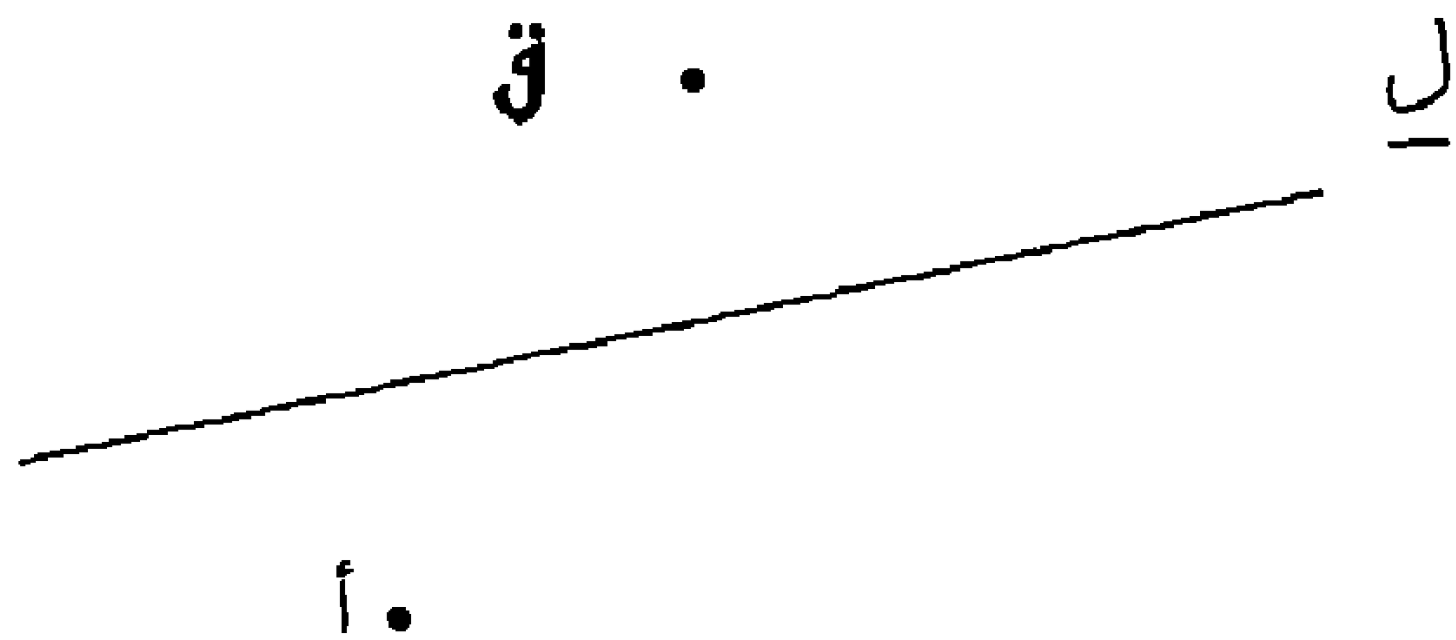


٢-برهن أن :اذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // ل ، فان $ت_{أب} \circ ر_{ل} = ر_{ل} \circ ت_{أب}$

٣- ليكن ل خط معطى ؛ أ ، ق نقط معطاه .

(أ) بين $ق = ر_{ل} \circ ر_{أ ، ٦٠}$

(ب) اوصف محور الانعكاس الانزلاقى $ر_{ل} \circ ر_{أ ، ٦٠}$



(ج) هل $ر_{ل} \circ ر_{أ ، ٦٠} = ر_{أ ، ٦٠} \circ ر_{ل}$ ؟

٤- ليكن $\underline{ل}$ محور الانعكاس الانزلاقى $ت_{أب} \circ م_{\underline{ل}}$ ، ق نقطه تبعد ٣ عن $\underline{ل}$.
اذا كانت $ق' = (ت_{أب} \circ م_{\underline{ل}})(ق)$ ، $\overline{ق ق'} = ٨$ ،فعين طول $\overleftarrow{أب}$.

٥- اذا كانت أ (٠،٠) ،ب (٢، ١) ،ج (٢، ٥) نقط معطاه .

(أ) أوجد احداثيات مركز الدوران للراسم $ر_{أ،٩٠} \circ ت_{بج}$.

(ب) اذا كانت ق (س ، ص) أى نقطه ، فأوجد احداثيات

$ق' = (ر_{أ،٩٠} \circ ت_{بج})(ق)$.

٦- أى العبارات التاليه يكون صحيحا :

(أ)اذا كان $\underline{ل}$ أى خط ، $\overleftarrow{أب}$ أى قطعه مستقيمه ؛ فان

$$ت_{أب} \circ م_{\underline{ل}} = م_{\underline{ل}} \circ ت_{أب}$$

(ب) اذا كانت $\underline{ل}$ ،$\underline{م}$ ، $\underline{ن}$ خطوط متوازيه ، فان $م_{\underline{ل}} \circ م_{\underline{م}} \circ م_{\underline{ن}}$.
يكون انعكاسا .

(ج)اذا كان $\underline{ن}$ محور الانعكاس الانزلاقى $م_ز$ ، $م_ز(\underline{ل}) // \underline{ل}$ ؛ فان $\underline{ل} // \underline{ن}$.

(ء) اذا كان $\overleftarrow{جد} \perp \underline{ل}$ ، فان $(ت_{بج} \circ م_{\underline{ل}})^{٢} = I$

(هـ) اذا كان $م_ز$ انعكاس انزلاقى ، فان $م_ز^{-١}$ انعكاس انزلاقى .

(و) تحصيل انعكاسين انزلاقيين هو انعكاس انزلاقى .

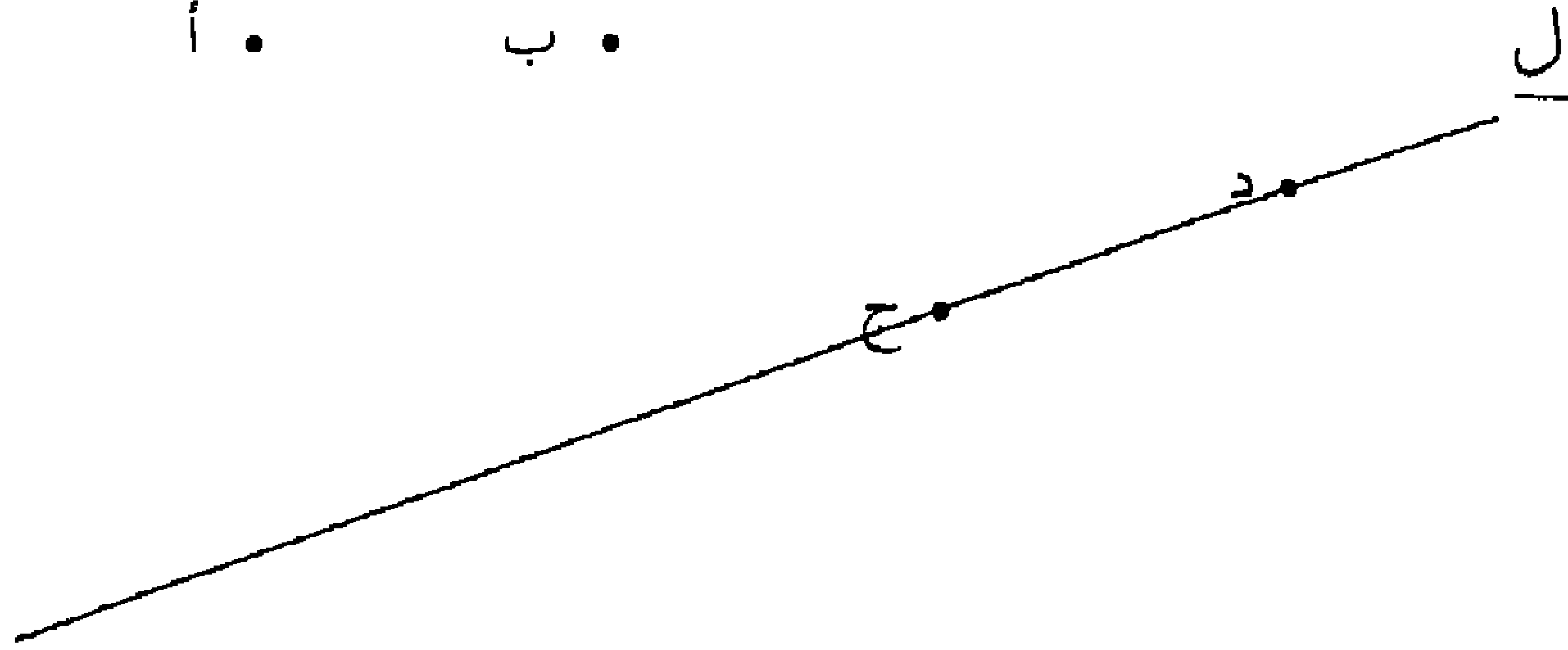
٧-برهن :

(أ) اذا كان $م_ز$ انعكاس انزلاقى فان $م_ز^{٢}$ إنتقال .

(ب) اذا كان $م_ز$ انعكاس انزلاقى فان $م_ز$ ليس له نقطه ثابته .

٨-اذا كان ل هو محور السينات ، أ(٢،٣)، ب(١،٦) نقط معطاه ، فعين أَ، بَ تحت تأثير $ر_{ل} \circ ت_{أب}$. وكذلك اكتب معادله محور الانعكاس الانزلاقى $ر_{ل} \circ ت_{أب}$

٩-ليكن ل خطاً ؛ أ ، ب، ج ، د نقط معطاه كما بالشكل المجاور . عين النقط س ، ص بشرط $\overline{س ص} = \overline{ج د}$ حتى يكون طول المسار أ س ص ب أقل ما يمكن.



[إرشاد: أوجد أ* = $(ت_{جد} \circ ر_{ل})$(أ)] .

١٠- لتكن أ ،ب ،أ*،ب*،ق نقط معطاه بحيث أن $\overline{أب} = \overline{أ^*ب^*}$. برهن أنه يوجد التساوى القياسى $ر_{١}$ الذى يرسل أ فوق أ* ، والتساوى القياسى $ر_{٢}$ الذى يرسل ب فوق ب* .

أوجد قَ = $ر_{١}$(ق) ، قً = $ر_{٢}$(ق) .

ماذا تقول عن القطعه $\overline{قَ قً}$ ؟

أ

أ* أ

ب*

ق

١١- ليكن ل خط مار بنقطه الأصل ، θ مقياس الزاويه من المحور السينى الى ل ، ق (س ، ص) أى نقطه . عين $ر_{ل}$ (ق) اذا كان :

(أ) θ=٢٢,٥ (ب) θ =١٣٥ (ج) θ =-١٥ .

١٢-اذا كانت و هى نقطه ، ق(س ، ص) أى نقطه ، فعين $ر_{و،-١٢٠}$ (ق) .

١٣- باستخدام الحقيقه التاليه :

اذا كان $ر_{و،\theta}$ راسم دوران حول نقطه الأصل يرسل (١،٠) فوق (أ،ب) فان

$ر_{و،\theta}$ (ق) = (أ س - ب ص ، ب س + أ ص) ∀ ق(س،ص)

أوجد $ر_{و،\theta}$ اذا كانت

(أ) θ =-٤٥ (ب) θ =١٥٠ (ج) θ =٢٧٠

١٤-اوصف الراسم

ت(س ، ص) = ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$س+$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ص ، _$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$س+$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ص)

١٥-هل الراسم

ت (س ، ص) = (٢س + ص ، _ س+ ٢ص)

راسم انعكاس ؟

١٦-اذا كان $ر_{و،\theta}$ (س ، ص) = (أ س - ب ص ، ب س+أ ص)

فعين $ر^{-١}_{و،\theta}$ (ق) حيث ق (س ، ص) أى نقطه .

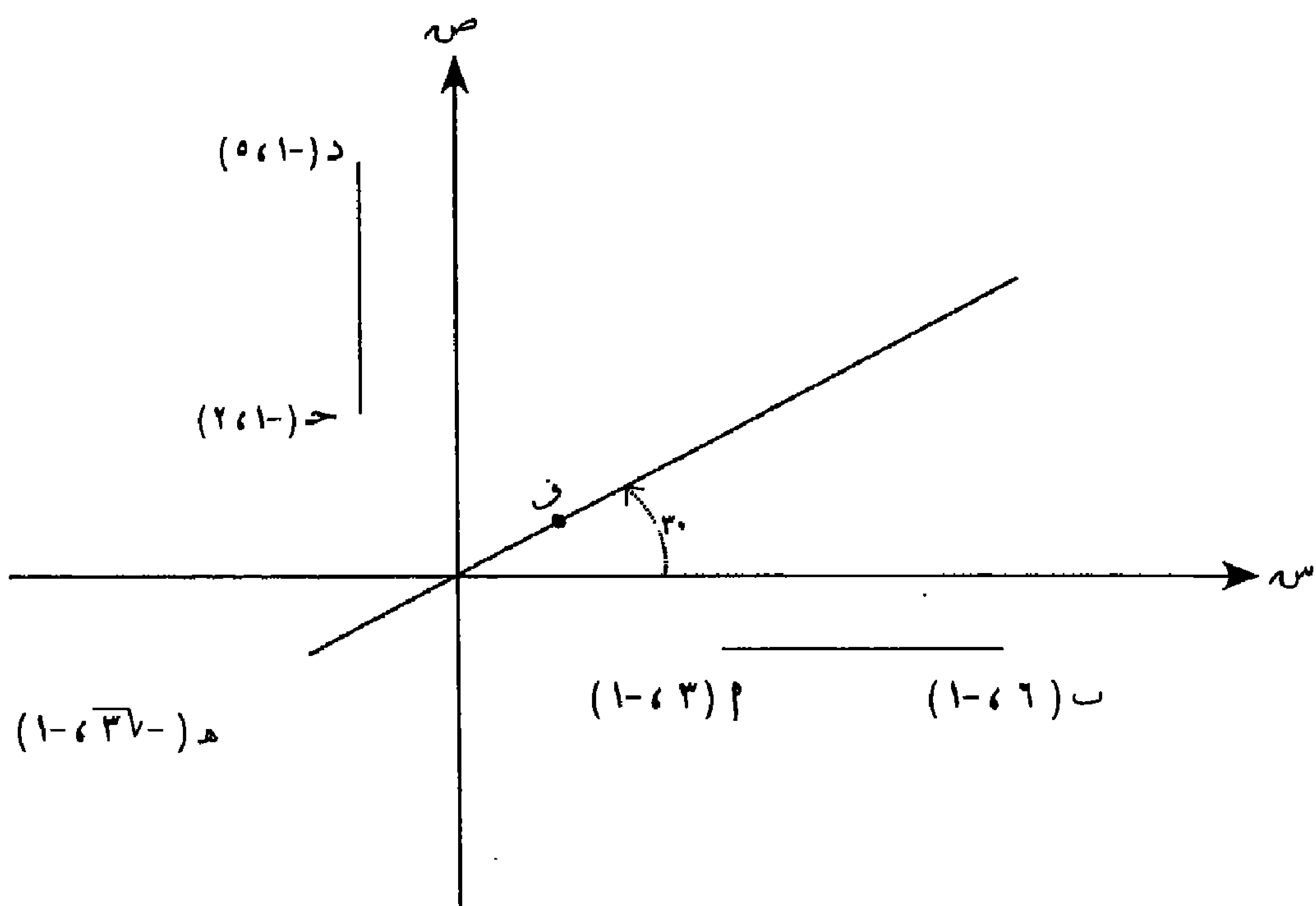
١٧- ليكن ع = {(س،ص) : ص = س٢ } . أوجد صوره ع تحت تأثير الراسم $ر_{و،٦٠}$
علماً بأن الدوران فى اتجاه مضاد لعقارب الساعه .

١٨- لتكن $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ ، $\overline{هـ ف}$ قطع مستقيمه متطابقه (انظر الشكل) ، **ق** (س،ص) أى نقطه .

(أ)أوجد التساوى القياسى المباشر الذى يرسل أ فوق جـ ، ب فوق د . ثم عين ت(**ق**).

(ب)اوجد التساوى القياسى المضاد ض الذى يرسل أ فوق د،ب فوق جـ ثم عين ض(**ق**).

(ج) أوجد التساوى القياسى المباشر ش الذى يرسل هـ فوق جـ ،ف فوق د ثم عين ش(**ق**) .



شكل (٥-١٣)

١٩- ليكن Δ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع . أوجد التساويات القياسيه الست التى ترسـل Δأب جـ فوق نفسه .

٢٠- ليكن أ ب ج د مربع . أوجد جميع التساويات القياسيه التى ترسل المربع أ ب ج د فوق نفسه .

الباب السادس

التشابه

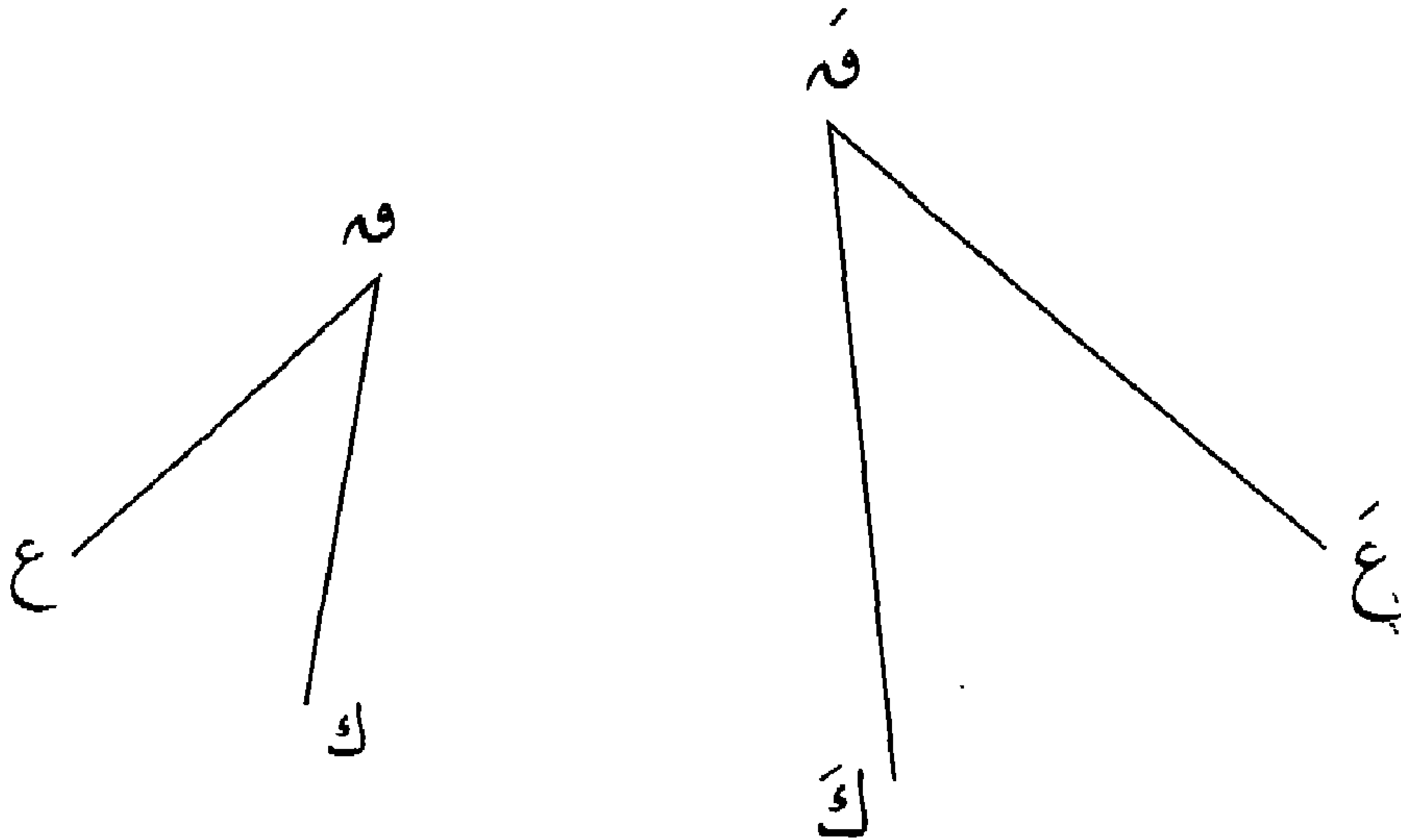
٦-١ : مفهوم التشابه :

تعريف : التحويله **تش** تسمى <u>**تحويله تشابه**</u> اذا واذا فقط وجد ثابت λ >
بحيث أن

$\overline{\text{قَ' كَ'}} = \lambda\ \overline{(\text{قَ ك})}$ $\forall$ **قَ** ، ك $\in$ ح^{2} ،

قَ' = تش (**قَ**) ، ك' = تش (ك)

λ يسمى <u>**ثابت التشابه**</u> .



شكل (٦-١)

فى شكل (٦-١) ، ثابت التشابه λ =٢ . أما اذا كانت λ=١ ، فالتحويله تـــش تكون تساوى قياسى . لذلك ، التساويات القياسيه هى مجموعه جزئيه من التشابهات .

نظريه (١) : صوره الخط المستقيم تحت تأثير راسم التشابه تكون خطاً مستقيماً .

البرهان :

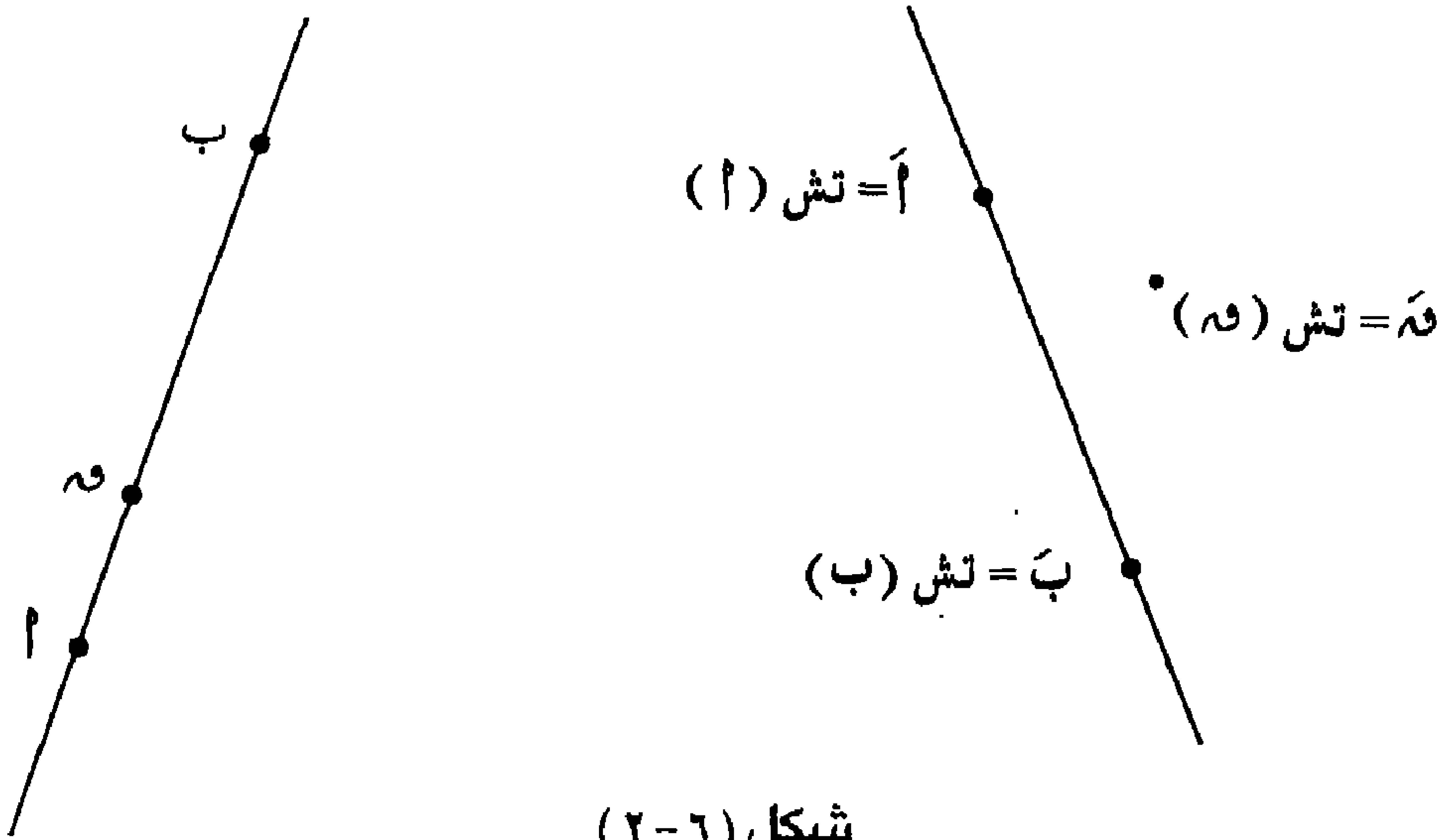
لنأخذ أ ، ب ∈ ل حيث أ ≠ ب ؛ ل أى خط .

المطلوب أثبات أن : تش (ل) = $\overleftrightarrow{أ'ب'}$

حيث $\overleftrightarrow{أ'ب'}$ هو الخط المستقيم المار بصور النقط أ ، ب .

أولاً ، سنبرهن أن : تش (ل) ⊂ $\overleftrightarrow{أ'ب'}$

لنأخذ أى نقطه ق ∈ ل ونثبت ق' ∈ $\overleftrightarrow{أ'ب'}$



شكل (٦-٢)

اذا كانت ق بين أ ، ب فان

$$\overline{أق} + \overline{ق ب} = \overline{أب}$$

ولكن

$$\overline{أ'ق'} + \overline{ق'ب'} = \lambda\ \overline{(أق)} + \lambda\overline{(ق ب)} .$$

= λ ($\overline{\text{أ ق}}$ + $\overline{\text{ق ب}}$) = λ ($\overline{\text{أ ب}}$)

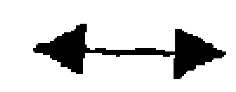
وحيث أن :

λ ($\overline{\text{أ ب}}$) = $\overline{\text{أ′ ب′}}$

فان :

$\overline{\text{أ′ ق′}}$ + $\overline{\text{ق′ ب′}}$ = $\overline{\text{أ′ ب′}}$

من هذا نستنتج أن : ق′ بين أ′ ، ب′ .



اذا كانت أ بين ب ، ق أو اذا كانت ق بين أ،ب ،فبنفس الطريقه يمكننا برهان أن ق′ ∈ أ′ب′ .

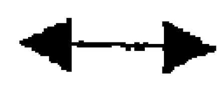
بالتالى ،فان صور النقط الواقعه على ل تكون على استقامه واحده ،أى أن



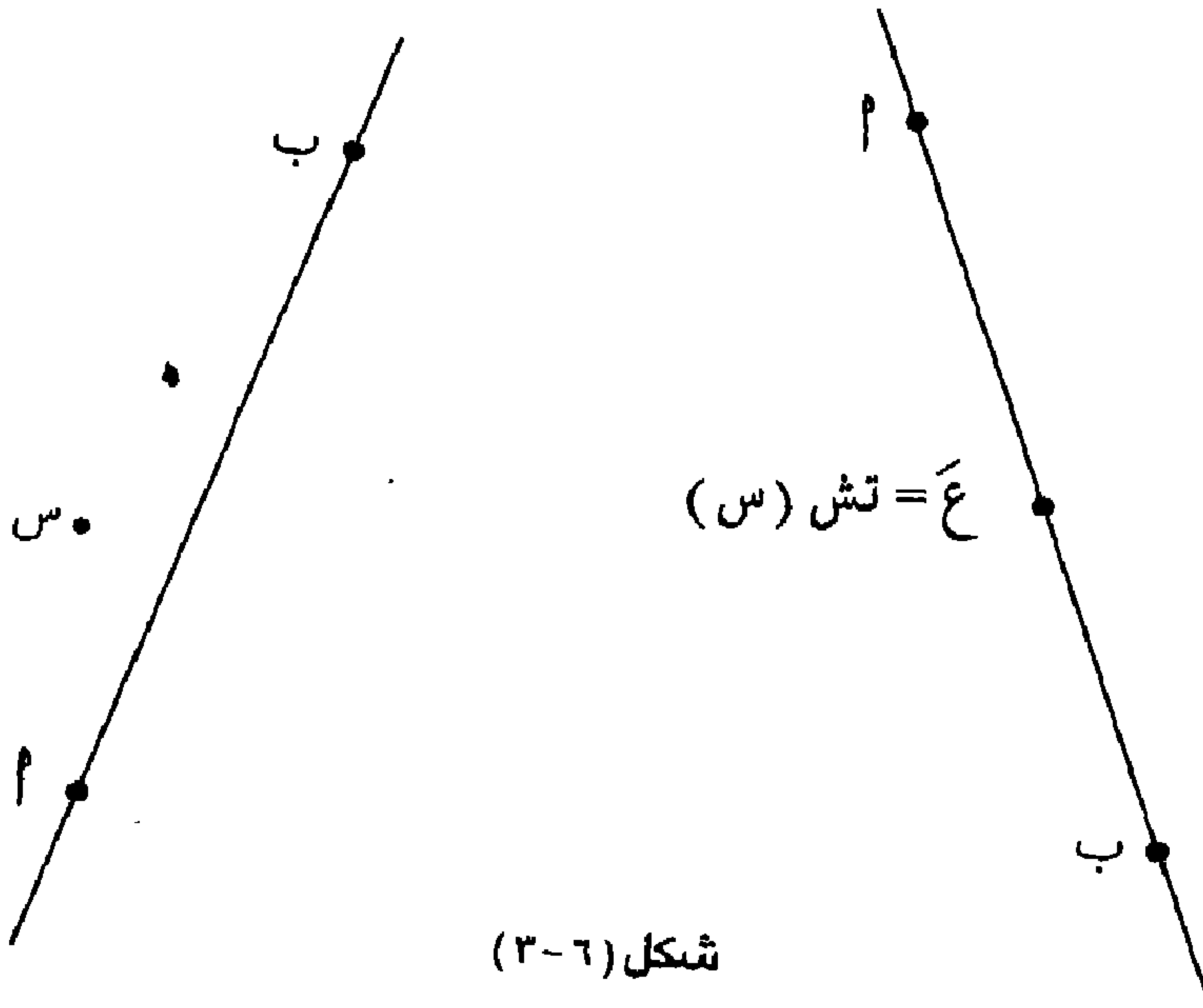
تش (ل) ⊂ أ′ب′

ولبرهان أن

أ′ب′ ⊂ تش (ل)



فيجب علينا إثبات أن كل نقطه على المستقيم أ′ب′ هى صوره لنقطه ما على ل .



شكل (٦-٣)

دعنا نفترض أن ع أى نقطه على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ'ب'}}$. حيث أن **تش** تحويله مستويه ، فانه توجد نقطه س بحيث أن **تش** (س) = ع .

لبرهان أن س ∈ ل . دعنا أولاً نفترض أن ع بين أ'، ب' .اذن

$$\overline{\text{أ' ع}} + \overline{\text{ع ب'}} = \overline{\text{أ'ب'}}$$

اذا كانت س ∉ ل ، فان

$$\overline{\text{أ س}} + \overline{\text{س ب}} > \overline{\text{أب}} \quad \Leftarrow \quad \lambda(\overline{\text{أ س}}) + \lambda(\overline{\text{س ب}}) > \lambda(\overline{\text{أ ب}})$$

$$\Leftarrow \quad \overline{\text{أ' س'}} + \overline{\text{س' ب'}} > \overline{\text{أ' ب'}}$$

وحيث أن $\quad$ س' = تش (س) = ع

فان

$$\overline{\text{أ' ع}} + \overline{\text{ع ب'}} > \overline{\text{أ' ب'}}$$

وهذا يتعارض مع : $\overline{\text{أ' ع}} + \overline{\text{ع ب'}} = \overline{\text{أ' ب'}}$.

وبالتالى فان س ∈ ل .

بنفس الطريقه ، يمكننا اثبات أن س ∈ ل اذا كانت أ' بين ع ، ب' أو إذا كانت ب' بين أ' ، ع .

لهذا تكون كل نقطه على الخط $\overleftrightarrow{\text{أ}'\text{ب}'}$ هى صوره لنقطه واقعه على ل ، أى

$\overleftrightarrow{\text{أ}'\text{ب}'} \supset$ **تش** (ل)

وبهذا نكون قد أثبتنا أن

تش(ل) = $\overleftrightarrow{\text{أ}'\text{ب}'}$.

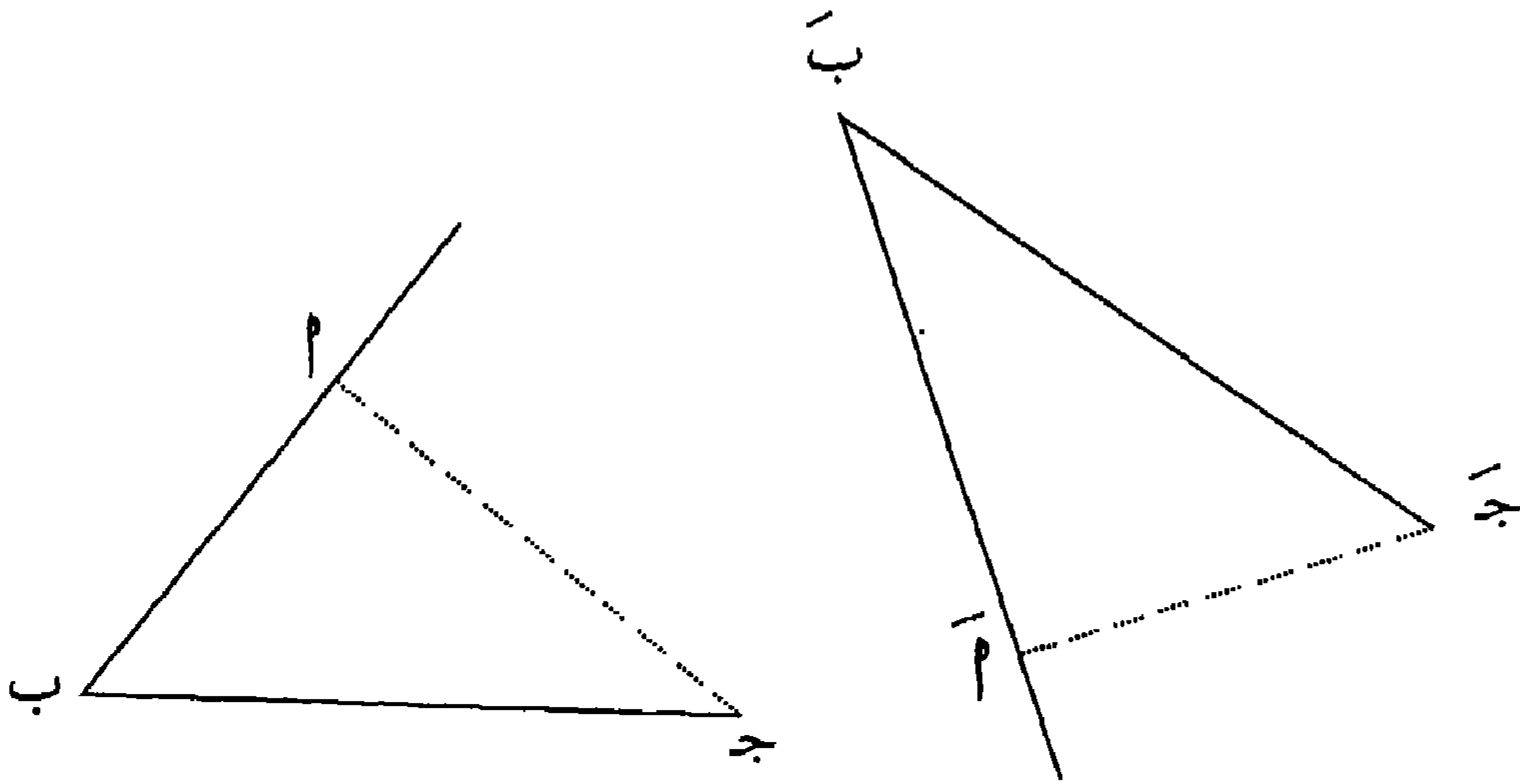
نظريه (٢) : إذا كانت **تش** تحويله تشابه ، فان

∠ أ ب جـ = ∠ أ' ب' جـ'

حيث ∠ أ' ب' جـ' = **تش** (∠ أ ب جـ)

البرهان :

لنفرض أن الزاويه أ' ب' جـ' هى صوره للزاويه أ ب جـ تحت تأثير تحويله التشابه **تش** .



شكل(٦-٤)

حيث أن

$\overline{\text{أ}'\text{ب}'} = \lambda \; (\overline{\text{أب}})$ ، $\overline{\text{أ}'\text{جـ}'} = \lambda \; (\overline{\text{أجـ}})$ ،

$\overline{ب جـ} = \lambda\,(\overline{ب جـ})$

فباستخدام نظريه التشابه "Δأبَ جَـ ~ Δأبَ جَـ " ينتج أن :

$\angle$ أ ب' جـ' = $\angle$ أ ب جـ .

٦-٢ : التكبير

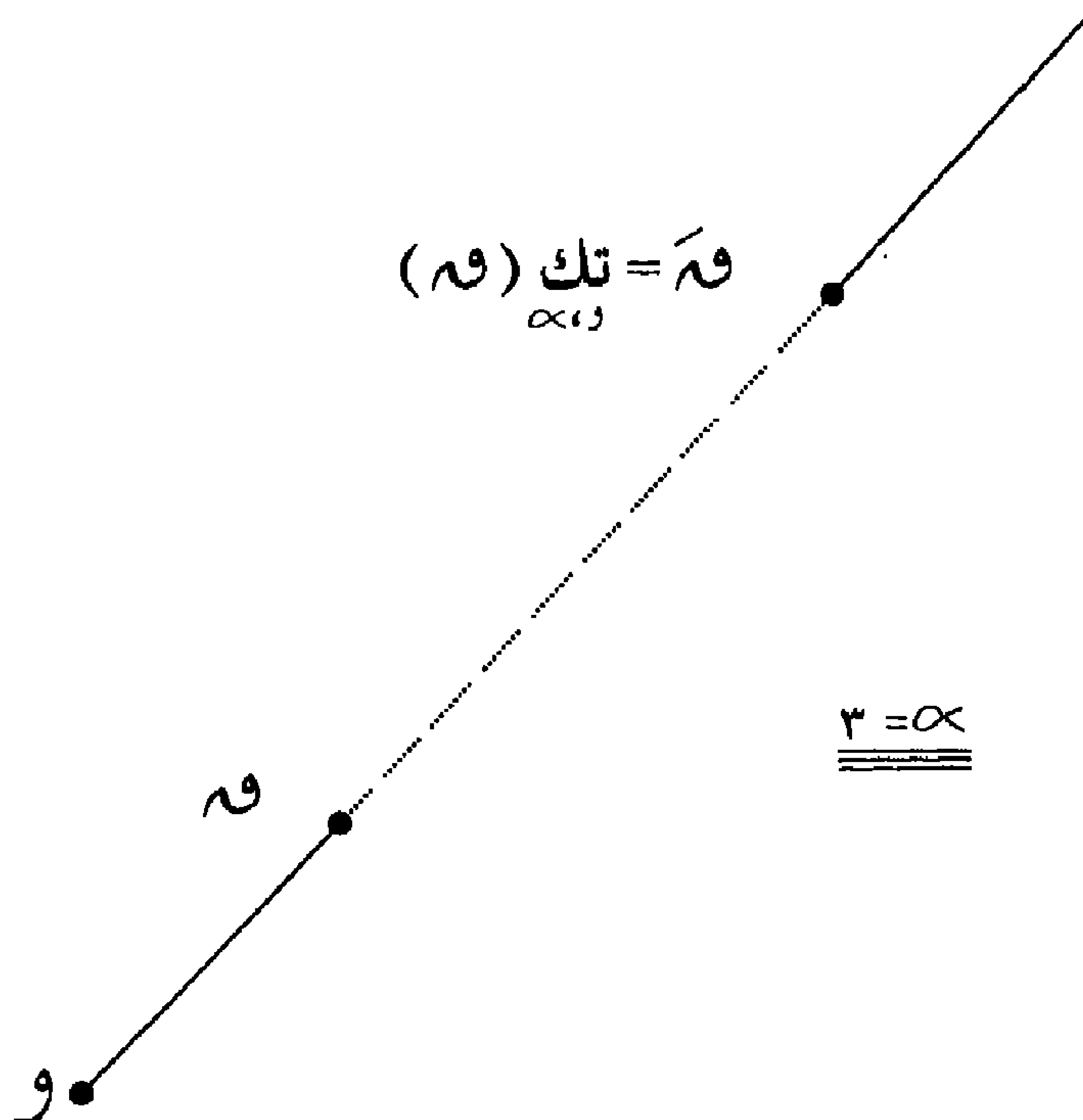
تعريف : لتكن و نقطه معطاه ، α> . (عدد موجب) الراسم **تك**$_{و،\alpha}$ يسمى راسم تكبير أذا واذا فقط :

١- **تك**$_{و،\alpha}$ (و) = و

٢ -لأى نقطه **ق** ≠ و ، تكون **ق**' = **تك**$_{و،\alpha}$ (**ق**) نقطه واقعه على الشعاع $\overleftarrow{و\text{ق}}$ بحيث

$\overline{و\text{ق}'} = \alpha\ \overline{(و\text{ق})}$

(وبلغه آخرى نقول أن **ق**' هى النقطه المحققه للشرط $\overleftarrow{و\text{ق}'} \doteq \alpha\ \overleftarrow{و\text{ق}}$)



شكل (٦-٥)

نظريه (٣) : كل تكبير هو تشابه .

البرهان :

برهان هذه النظريه يعتمد على شقين : الاول هو إثبات أن لأى زوج من النقط المختلفه ق،ك ،

$$\overline{\text{ق}'\text{ك}'} = \alpha(\overline{\text{ق ك}})$$

والثانى هو أثبات أن $\text{تك}_{\alpha،\text{و}}$ تحويله مستويه .

لكى نثبت أن

$$\overline{\text{ق}'\text{ك}'} = \alpha\ (\overline{\text{ق ك}})$$

فهناك عده حالات يمكن دراستها :

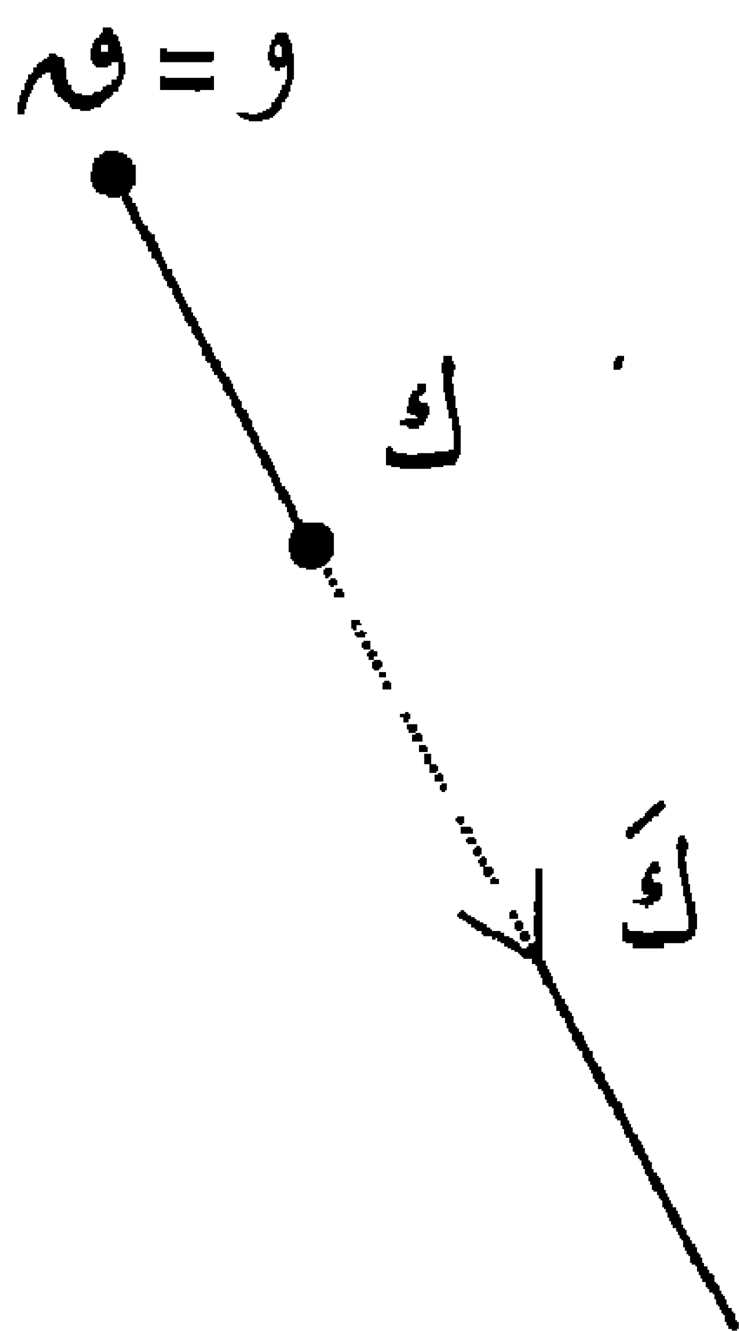
أولا : اذا كانت احدى النقط هى مركز التكبير (ليكن ق = و) .

اذن

$$\text{ق}' = \text{و}' = \text{و}$$

$$\overline{\text{ق}'\text{ك}'} = \overline{\text{و ك}'}$$

$$= \alpha\ (\overline{\text{و ك}}) = \alpha\ (\overline{\text{ق ك}})$$



شكل (٦-٦)

ثانيا: اذا وقعت ك على الشعاع $\overleftarrow{\text{و ق}}$.

فى هذه الحاله ، لنفرض أن ق بين و ، ك بحيث أن

$$\overline{\text{وق}} + \overline{\text{ق ك}} = \overline{\text{و ك}}$$

بالتالى فان :

شكل (٦-٧)

$\overline{\text{وق}} > \overline{\text{وك}} \quad \Leftarrow \quad \alpha\,(\overline{\text{وق}}) > \alpha(\overline{\text{وك}})$

$\Leftarrow \quad \overline{\text{وق}'} > \overline{\text{و ك}'}$

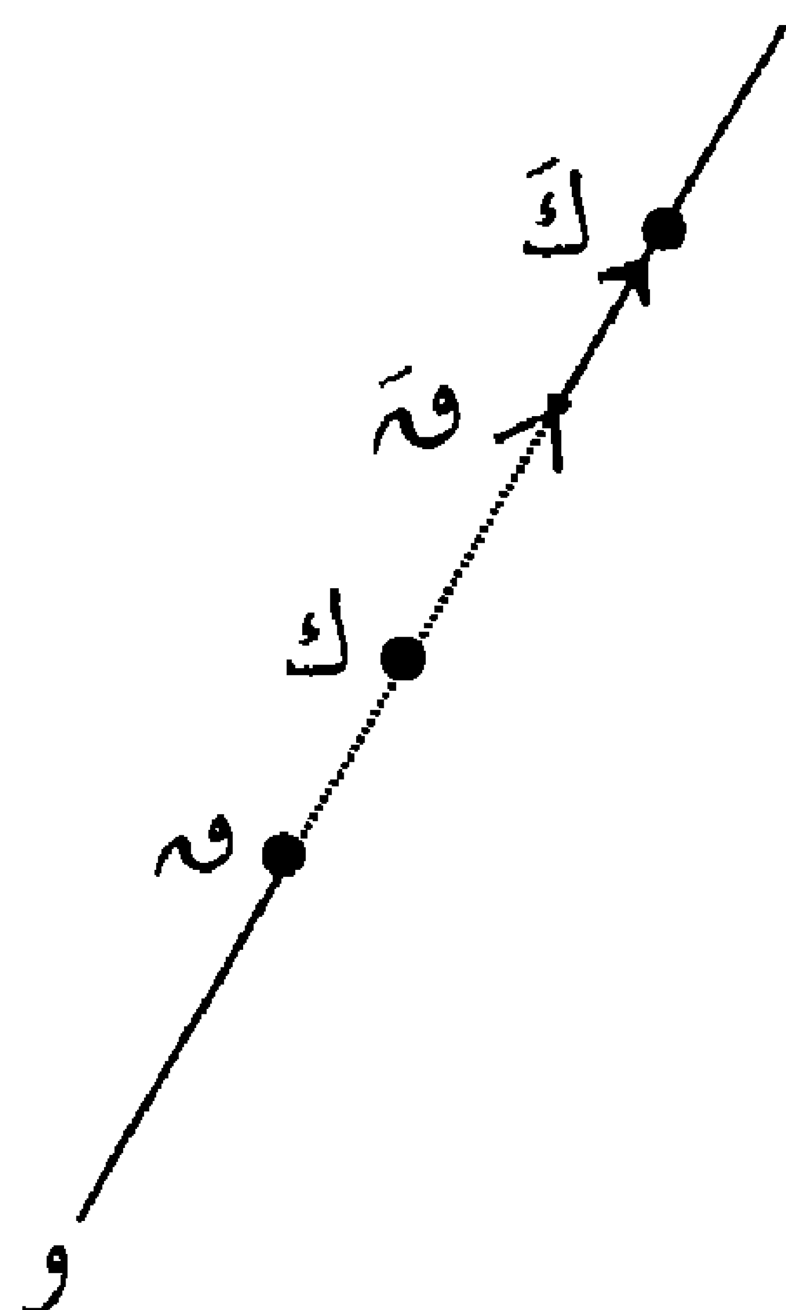
اذن قَ تكون بين و ، كَ ، وبالتالى

$\overline{\text{ق}'\text{ك}'} = \overline{\text{وك}'} - \overline{\text{وق}'}$

$= \alpha\,(\overline{\text{وك}}) - \alpha(\overline{\text{وق}})$

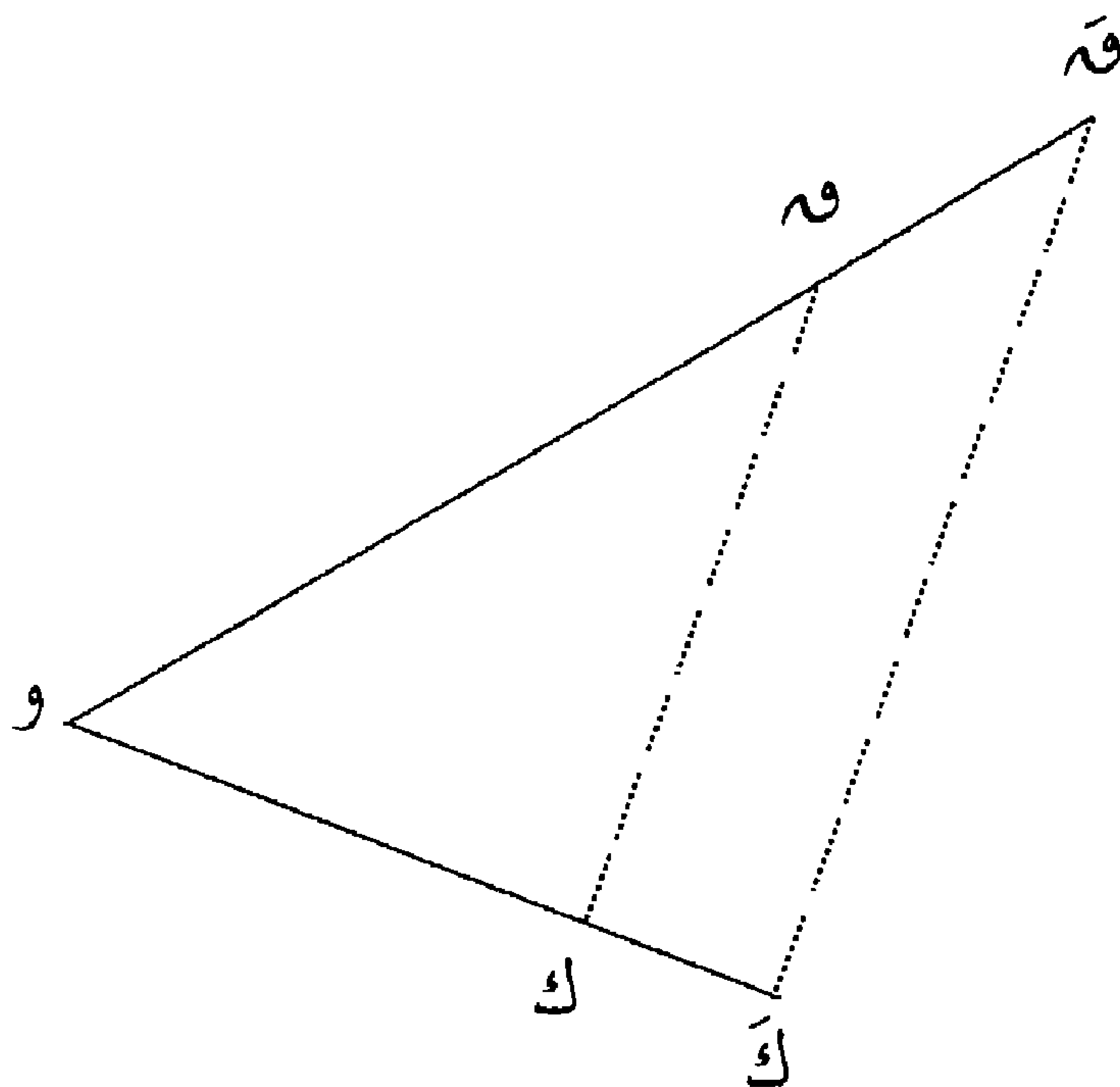
$= \alpha\,(\overline{\text{وك}} - \overline{\text{وق}})$

$= \alpha\,(\overline{\text{ق ك}})$.



شكل (٦-٧)

ثالثاً : نفرض أن النقط و، ق ، ك غير واقعه على استقامه واحده.



شكل (٦-٨)

بما أن

$$\overline{\text{وق}'} = \alpha(\overline{\text{وق}})$$

$$\overline{\text{وك}'} = \alpha(\overline{\text{وك}})$$

فان

$$\frac{\overline{\text{و ق}'}}{\overline{\text{و ق}}} = \frac{\overline{\text{و ك}'}}{\overline{\text{و ك}}}$$

ومن نظريه التشابه " Δ وق' ك' ~ Δ و ق ك " ينتج أن :

$$\frac{\overline{\text{و ق}'}}{\overline{\text{و ق}}} = \frac{\overline{\text{و ك}'}}{\overline{\text{و ك}}} = \alpha$$

اذن ،لجميع النقط ق ، ك يكون

$$\overline{\text{ق}'\text{ك}'} = \alpha(\overline{\text{ق ك}})$$

الآن، يتبقى لنا إثبات $\text{تك}_{\text{و}،\alpha}$ أن تحويله مستويه .

علينا أولاً ملاحظه أن كل نقطه فى المستوى ، لها صوره واحده تماماً تحت تأثير التحويله $\text{تك}_{\text{و}،\alpha}$.

برهان أن التحويله $\text{تك}_{\text{و}،\alpha}$ احاديه ــ يترك كتمرين.

أخيراً ، يجب علينا اثبات أن : لكل نقطه ص توجد نقطه س بحيث أن

$$\text{تك}_{\text{و}،\alpha}(\text{س}) = \text{ص}$$

اذا كانت س ∈ $\overleftarrow{\text{وص}}$ بحيث أن

$$\overrightarrow{\text{وس}} = \frac{1}{\alpha}\ \overrightarrow{(\text{وص})}\ ،$$

فان هذا يؤكد لنا أن $تك_{و،\alpha}$ يرسل س فوق ص .

وبالتالى فان $تك_{و،\alpha}$ تحويله مستويه .

ملاحظه (١) : حيث أن التشابه يرسب يرسل الخطوط فوق الخطوط ، ويحافظ على التوازى والتعامد . لذلك فالتكبير يكون له نفس الخواص .

نظريه (٤) : اذاكان $\underline{ل}'$ صوره خط معطى $\underline{ل}$ تحت تأثير راسم التكبير $تك_{و،\alpha}$ ، فان

$\underline{ل} = \underline{ل}'$ اذا كانت و ∋ $\underline{ل}$ ،

$\underline{ل} // \underline{ل}'$ اذا كانت و ∌ $\underline{ل}$.

البرهان : يترك كتمرين .

من السهل اثبات أن : اذا كانت و هى نقطه الأصل ، ق(س، ص) أى نقطه ، فان

$$تك_{و،\alpha}\ (\text{س، ص}) = (\alpha\ \text{س}، \alpha\ \text{ص})$$

أو

$$\begin{pmatrix} \alpha & \cdot \\ \cdot & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ص}' \end{pmatrix}$$

حيث

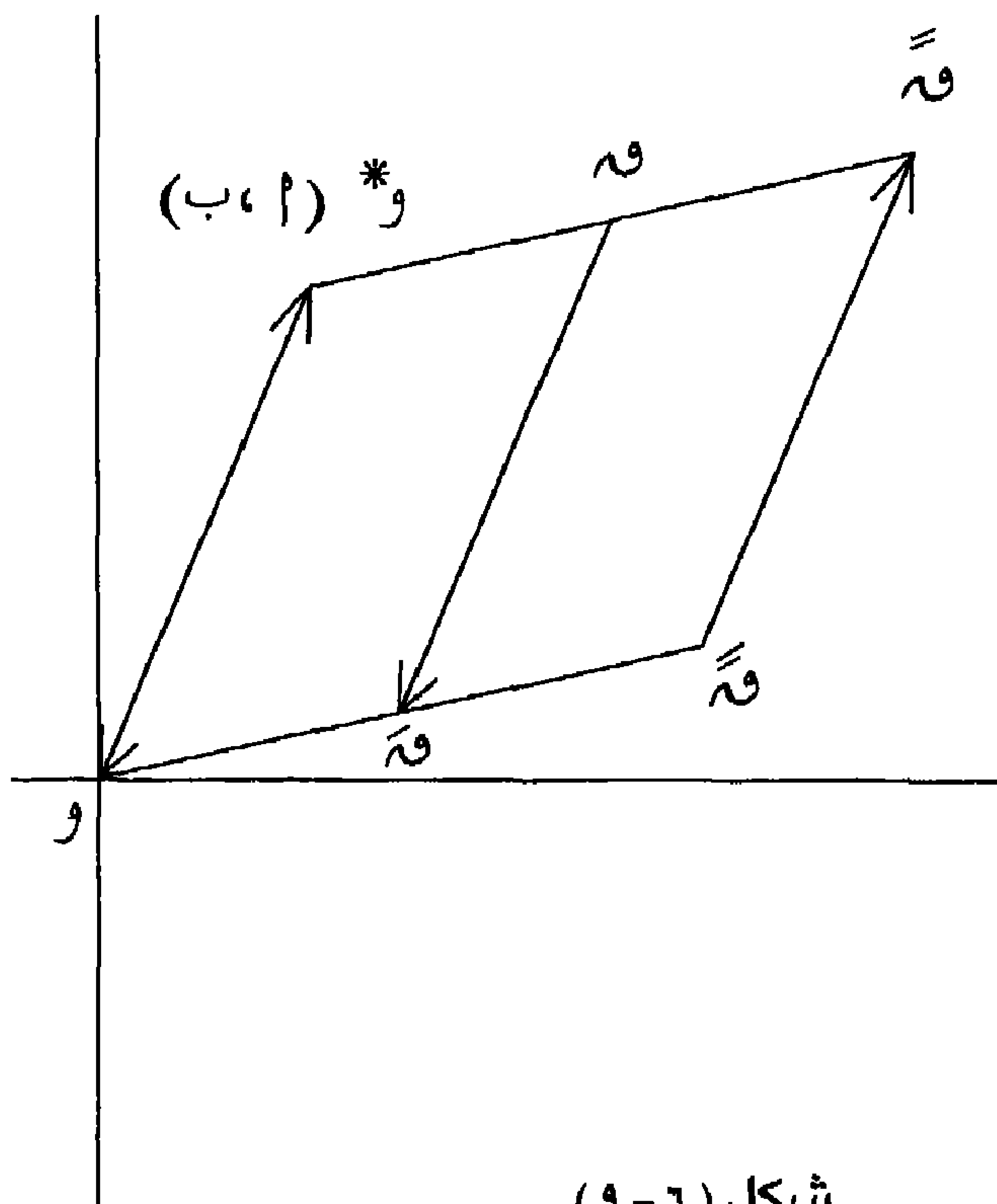
$$ع = \alpha \begin{pmatrix} ١ & \cdot \\ \cdot & ١ \end{pmatrix}$$

هى مصفوفه التحويل المناظرة للتكبير .

ولكن اذا كانت $و^* = (أ ، ب)$ ؛ فان $تك_{و^*،\alpha}$ يكافىء تحصيل ثلاثه

رواسم : الأول إنتقال يرسل و* فوق و ، الثانى تكبير مركزه و ، الثالث انتقال يرسل و فوق و* ، أى

$$\text{تك}_{\text{و*}،\alpha} = \text{ت}_{\text{و و*}} \circ \text{تك}_{\text{و}،\alpha} \circ \text{ت}_{\text{و*و}} .$$



شكل (٦-٩)

أو

$$\text{تك}_{\text{و*}،\alpha}(\text{ق}) = (\text{ت}_{\text{و و*}} \circ \text{تك}_{\text{و}،\alpha} \circ \text{ت}_{\text{و*و}})(\text{ق})$$

$$= (\text{ت}_{\text{و و*}} \circ \text{تك}_{\text{و}،\alpha})(\text{ت}_{\text{و*و}}(\text{ق}))$$

$$= (\text{ت}_{\text{و و*}} \circ \text{تك}_{\text{و}،\alpha})(\text{س} - \text{أ} ، \text{ص} - \text{ب})$$

$$= \text{ت}_{\text{و و*}}(\text{تك}_{\text{و}،\alpha}(\text{س} - \text{أ} ، \text{ص} - \text{ب}))$$

$$= \text{ت}_{\text{و و*}}(\alpha(\text{س} - \text{أ}) ، \alpha(\text{ص} - \text{ب}))$$

$= (\alpha$ س $- \alpha$ أ + أ ، ص $- \alpha$ ب + ب)

$= (\alpha$ س+أ (١ $- \alpha$) ، α ص+ ب (١ $- \alpha$))

وهذه النتيجه يمكن صياغتها فى النظريه التاليه:

نظريه(٥) : اذا كان تك$_{و^*، \alpha}$ راسم تكبير مركزه و* ، وعامله القياسى α ، ق (س،ص) أى نقطه ؛ فان

تك$_{و^*، \alpha}$ (ق) $= (\alpha$ س + أ (١ $- \alpha$) ، α ص+ب (١ $- \alpha$)) .

ملاحظه(٢) : الراسم ر المعرف بالقاعدة

ر (ق) $= (\alpha$ س+ جـ ، α ص+ د) $\forall$ ق (س،ص)

حيث $\alpha >$. ، $\alpha \neq$ ١ يكون راسم تكبير .

ولتعين مركز التكبير ، فعلينا ملاحظه أن :

جـ $= \frac{جـ}{١ - \alpha}$ (١ $- \alpha$)

لذلك ، فان

ر (ق) $= (\alpha$ س + $\frac{جـ}{١ - \alpha}$ (١ $- \alpha$) ، α ص + $\frac{د}{١ - \alpha}$ (١ $- \alpha$))

وباستخدام نظريه (٥) ، يتضح أن ر راسم تكبير مركزه :

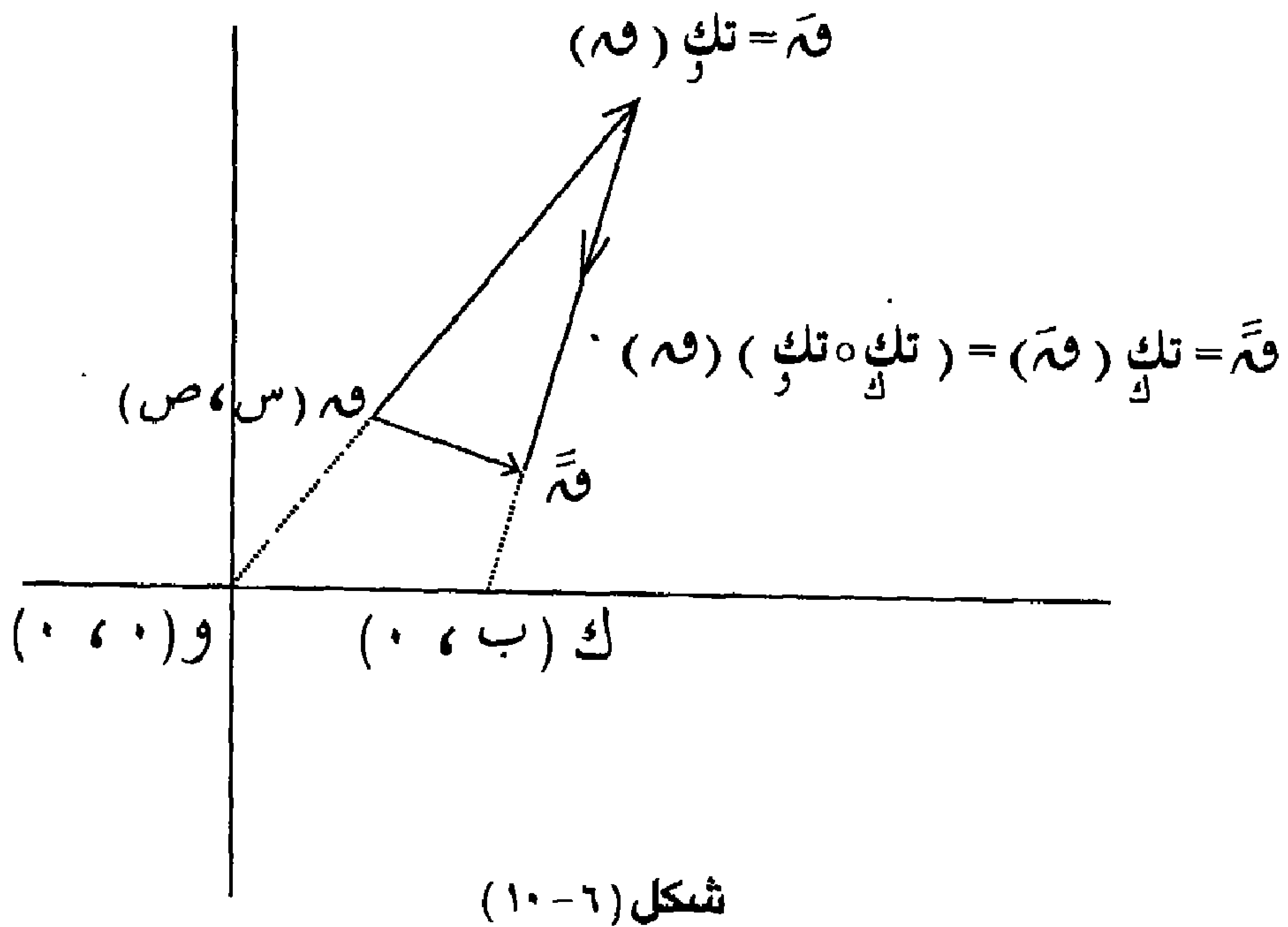
($\frac{\overrightarrow{ج}}{1-\alpha}$ ، $\frac{د}{1-\alpha}$) وعامله القياسى = α

نتيجه (١) : تحصيل تكبيرين $تك_{و،\alpha}$ ، $تك_{ك،\beta}$ (حيث و ≠ ك) هو تكبير $تك_{حـ،\alpha\beta}$

حيث جـــ ∈ $\overleftrightarrow{وك}$ ، $\alpha\beta \neq 1$. واذا كان $\alpha = \beta$ ، فان التحصيل يكون إنتقالاً موازياً للخط $\overleftrightarrow{وك}$.

البرهان :

حتى تكون حساباتنا بسيطه ، فاننا نختار و(٠،٠) ، ك (ب،٠) كما هو موضح بشكل (٦-١٠)



شكل (٦-١٠)

من نظريه (٥) ، يكون لأى نقطه **ق** (س،ص)

$تك_{و،\alpha}$ (**ق**) = (α س ، α ص)

$$تك_{ك،\beta}(ق) = (\beta\ س + (1-\beta)\ ب ،\ \beta\ ص)$$

بالتالى ، فان

$$(تك_{ك،\beta} \circ تك_{و،\alpha})(ق) = تك_{ك،\beta}(تك_{و،\alpha}(ق))$$

$$= تك_{ك،\beta}(\alpha س ، \alpha ص)$$

$$= (\beta(\alpha\ س) + (1-\beta)\ ب ،\ \beta(\alpha\ ص)) \qquad (i)$$

اذا كان $\beta\alpha \neq 1$ ، فان (i) تكتب فى الصوره

$$(تك_{ك،\beta} \circ تك_{و،\alpha})(ق) = ((\beta\alpha)\ س + \frac{ب - ب\beta}{1-\beta\alpha}(1-\beta\alpha) ،\ (\beta\alpha)\ ص)$$

باستخدام نظريه (٥)ينتج أن :

($تك_{ك،\beta} \circ تك_{و،\alpha}$) هو تكبير ، مركزه النقطه

جـ ($\frac{ب - ب\beta}{1-\beta\alpha}$ ، ٠) وعامله القياسى $\beta\alpha$.

أى أن : $تك_{ك،\beta} \circ تك_{و،\alpha} = تك_{،\beta\alpha}$

يمكنك ملاحظه أيضاً أن جـ $\in \overleftrightarrow{وك}$

على الجانب الآخر ، اذا كان $\beta\alpha = 1$ ، و $\neq$ ك ؛ فان ب $\neq$ ٠ ، وبالنظر الى المعادله (i) يتضح أن ($تك_{ك،\beta} \circ تك_{و،\alpha}$) هو إنتقال فى اتجاه يوازى $\overleftrightarrow{وك}$ ، لأن أى نقطه ق (س،ص) ترسل فوق قَ(س+ ب − ب β ، ص) .

نتيجه (٢) : لنفرض أن وهى مركز التكبير لكل من $تك_{و،\alpha}$ ،$تك_{و،\beta}$.

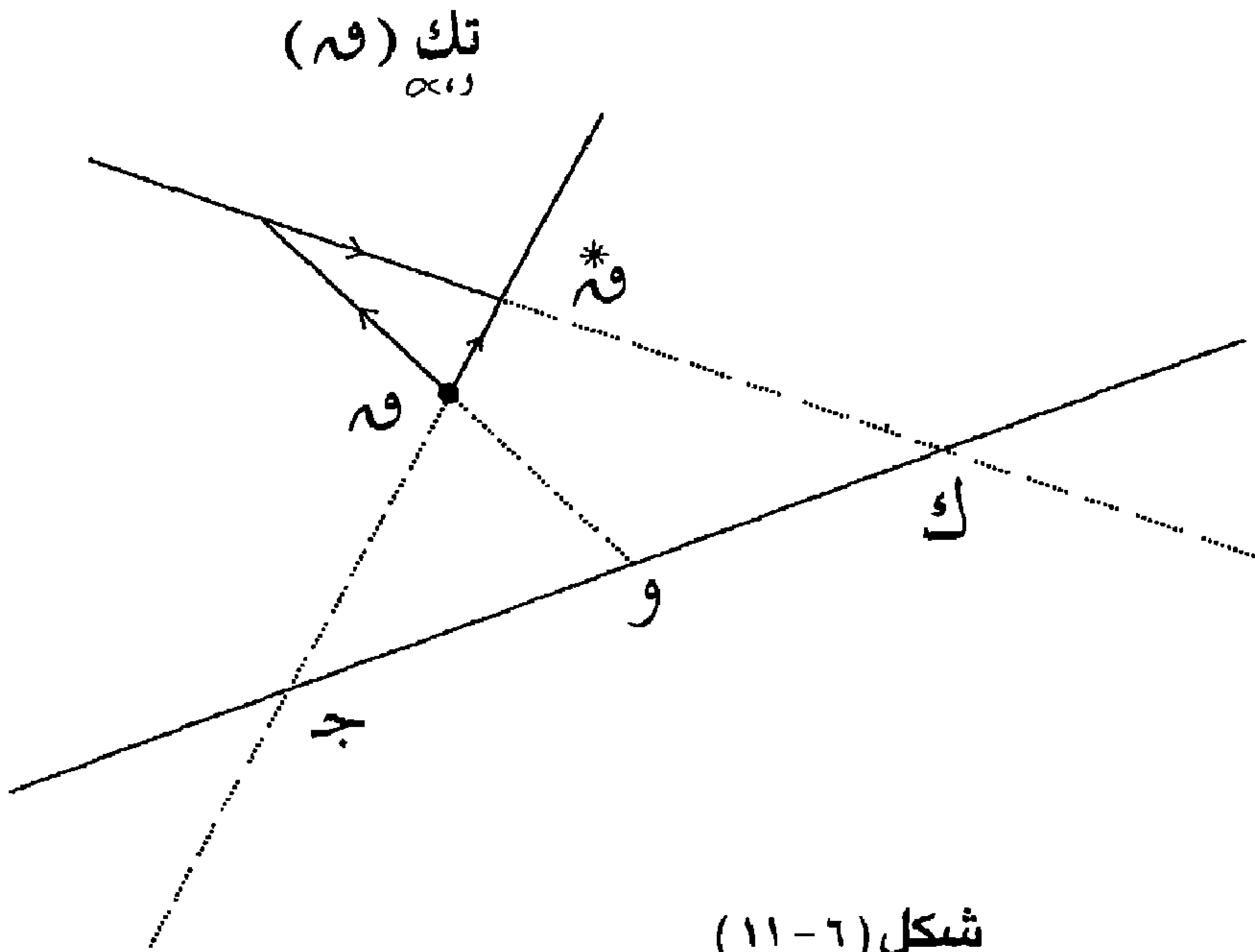
اذا كان $\beta\alpha \neq 1$ ، فان

$$تك_{و،\alpha} \circ تك_{و،\beta} = تك_{و،\beta\alpha}$$

اذا كان $\beta\alpha$ = ١ ، فان

$$\text{تك}_{\text{و}،\alpha} \circ \text{تك}_{\text{و}،\beta} = I$$

* نتيحه (٣) : لأى تكبير $\text{تك}_{\text{و}،\alpha}$ ، يوجد معكوس $\text{تك}^{-1}_{\text{و}،\alpha}$ = $\text{تك}_{\text{و}،\frac{1}{\alpha}}$.



شكل (٦ - ١١)

حتى نتبين موضع مركز التكبير ($\text{تك}_{\text{ك}،\beta} \circ \text{تك}_{\text{و}،\alpha}$) فاننا نلاحـــظ أن :

$$\text{ه}^* = (\text{تك}_{\text{ك}،\beta} \circ \text{تك}_{\text{و}،\alpha})(\text{ه}) = \text{تك}_{\text{جـ}،\alpha\beta}(\text{ه})$$

أولا ، لاحظ أن جـــ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ه ه}^*}$ من تعريف التكبير . والآن باستخدام نتيجه (١) لاحظ أن جـــ ∈ $\overleftrightarrow{\text{وك}}$. من هذا نستنتج أن

$$\text{جـ} = \overleftrightarrow{\text{وك}} \cap \overleftrightarrow{\text{ه ه}^*}$$

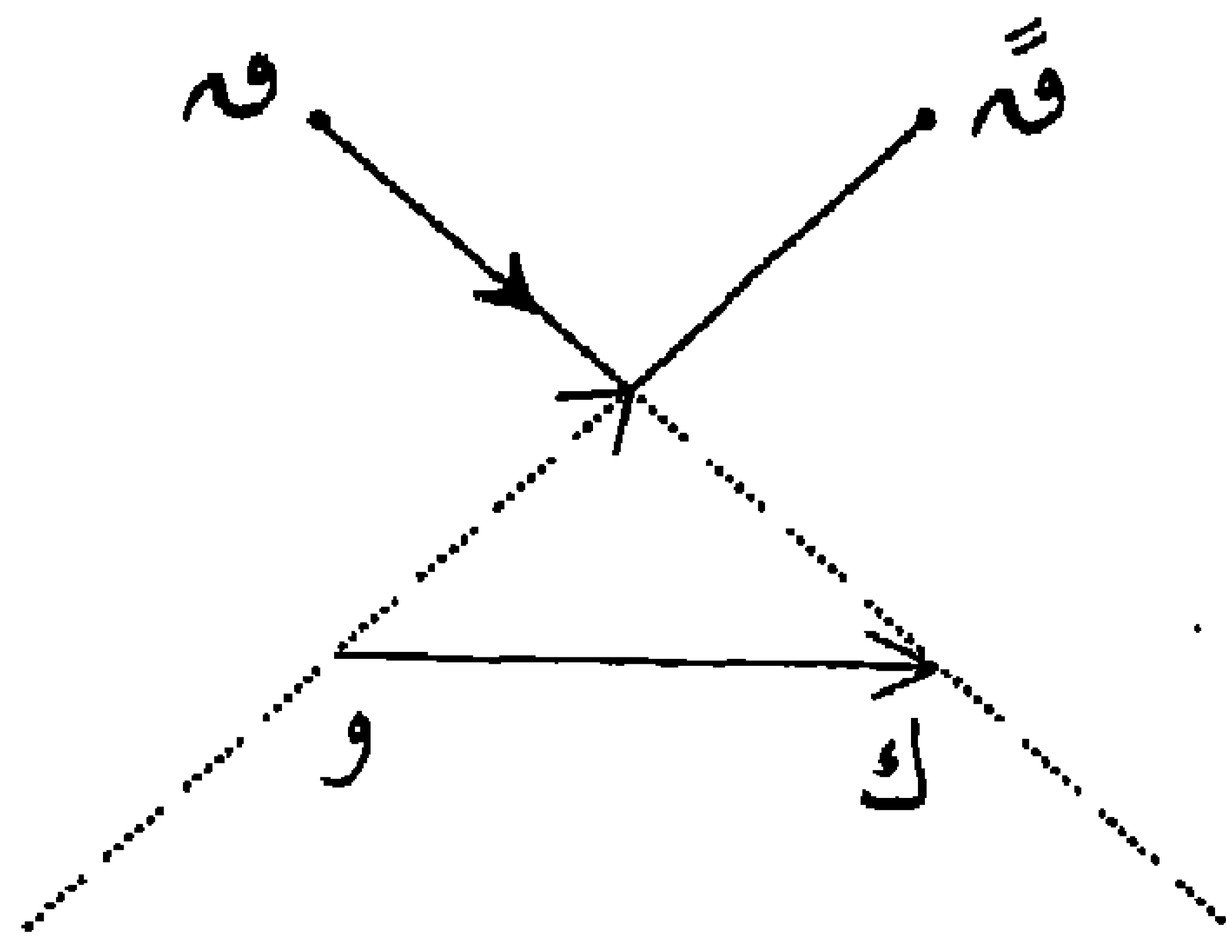
نظريه (٦) : اذا كان $\underset{\text{وك}}{\text{ت}}$ راسم انتقال ما ؛ $\text{تك}_{\text{و}،٢}$ ، $\text{تك}_{\text{ك}،\frac{١}{٢}}$ رواسم تكبير معطاه ،

فان

$$\underset{\text{وك}}{\text{ت}} = \text{تك}_{\text{و}،٢} \circ \text{تك}_{\text{ك}،\frac{١}{٢}}$$

البرهان :

$$(\text{تك}_{\text{و}،٢} \circ \text{تك}_{\text{و}،\frac{١}{٢}}) = \text{فً}$$



شكل (٦-٢١)

باستخدام نتيجه (١) ، نجد أن

$$\text{تك}_{\text{و}،٢} \circ \text{تك}_{\text{ك}،\frac{١}{٢}} = \underset{\text{حد}}{\text{ت}}$$

حيث $\underset{\text{حد}}{\text{ت}}$ إنتقال ما .

المطلوب اثبات أن : $\underset{\text{حد}}{\text{ت}} = \underset{\text{وك}}{\text{ت}}$

أى علينا اثبات أن : $\overleftarrow{\text{حد}} \doteq \overleftarrow{\text{وك}}$

لنعتبر أن

$$\underset{\text{حد}}{\text{ت}}(\text{ك}) = \text{تك}_{\text{و}،٢} \circ \text{تك}_{\text{ك}،\frac{١}{٢}}(\text{ك})$$

$$= \text{تك}_{\text{و}،٢}\left(\text{تك}_{\text{ك}،\frac{١}{٢}}(\text{ك})\right)$$

$$= \text{تك}_{\text{و}،٢}(\text{ك}) = \text{ك}''$$

حيث ك منتصف القطعه المستقيمه $\overline{\text{و ك}''}$.

لهذا فان $\overrightarrow{\text{وك}} \doteq \overrightarrow{\text{ك ك}''}$

بالتالى تكون

$$\overrightarrow{\text{وك}} \doteq \overrightarrow{\text{جـ د}} \text{ ،}$$

$$\text{ت}_{\text{وك}} = \text{ت}_{\text{جـ د}} = \text{تك}_{\text{و}،٢} \circ \text{تك}_{\text{ك}،\frac{١}{٢}}$$

نظريه (٧) : تحصيل أى عدد من التكبيرات والتساويات القياسيه يكون تشابهاً .

فى نهايه هذا البند ، سنقوم ببرهان الحقيقة التاليه :

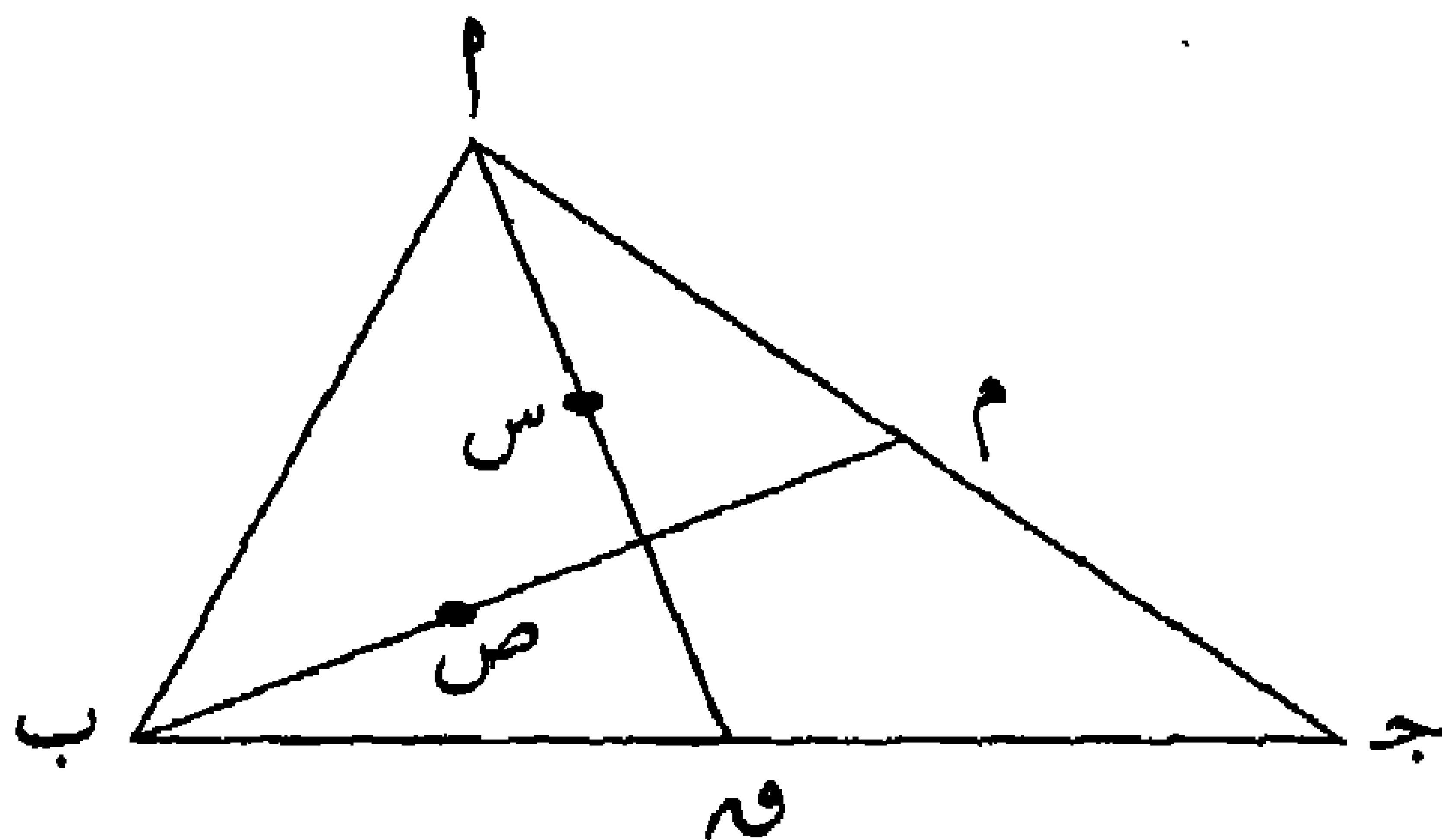
* "المستقيمات المتوسطه للمثلث تتلاقى فى نقطه واحده "

بما أن

$$\text{س} = \text{تك}_{\text{أ}،\frac{٢}{٣}}(\text{ن}) \quad \text{، ن} = \text{تك}_{\text{ب}،\frac{١}{٢}}(\text{جـ})$$

فان

$$\text{س} = \left(\text{تك}_{\text{أ}،\frac{٢}{٣}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،\frac{١}{٢}}\right)(\text{جـ}) \quad (١٣)$$



شكل (٦-١٣)

وحيث أن

$$\text{تك}^{-1}_{\text{أ}،\frac{٢}{٣}} = \text{تك}_{\text{أ}،\frac{٣}{٢}} \quad ، \quad \text{تك}^{-1}_{\text{ب}،\frac{١}{٢}} = \text{تك}_{\text{ب}،٢}$$

فان :

$$\text{جـ} = (\text{تك}_{\text{أ}،\frac{٢}{٣}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،\frac{١}{٢}})^{-1}(\text{س})$$

$$= (\text{تك}^{-1}_{\text{ب}،\frac{١}{٢}} \circ \text{تك}^{-1}_{\text{أ}،\frac{٢}{٣}})(\text{س})$$

$$= (\text{تك}_{\text{ب}،٢} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{٣}{٢}}) \qquad (ii)$$

لكن

$$\text{ص} = (\text{تك}_{\text{ب}،\frac{٢}{٣}} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{١}{٢}})(\text{جـ}) \qquad (iii)$$

اذن

$$\text{ص} = (\text{تك}_{\text{ب}،\frac{٢}{٣}} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{١}{٢}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،٢} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{٣}{٢}})(\text{س})$$

وباستخدام نتيجه (٢) نجد أن :

$$\text{تك}_{\text{ب}،\frac{٣}{٢}} = \text{تك}_{\text{ب}،\frac{١}{٣}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،٢} \quad ،$$

$$\text{تك}_{\text{أ}،\frac{٣}{٢}} = \text{تك}_{\text{أ}،\frac{١}{٢}} \circ \text{تك}_{\text{أ}،٣}$$

اذن :

$$\text{ص} = ((\text{تك}_{\text{ب}،\frac{١}{٣}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،٢}) \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{١}{٢}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،٢} \circ (\text{تك}_{\text{أ}،\frac{١}{٢}} \circ \text{تك}_{\text{أ}،٣}))(\text{س})$$

$$= (\text{تك}_{\text{ب}،\frac{١}{٣}} \circ (\text{تك}_{\text{ب}،٢} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{١}{٢}}) \circ (\text{تك}_{\text{ب}،٢} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{١}{٢}}) \circ \text{تك}_{\text{أ}،٣})(\text{س})$$

$$= (\text{تك}_{\text{ب}،\frac{١}{٣}} \circ \text{ت}_{\text{ب أ}} \circ \text{ت}_{\text{ب أ}} \circ \text{تك}_{\text{أ}،٣})(\text{س})$$

$$= (\text{تك}_{\text{ب}،\frac{1}{3}} \circ \text{ت}_{2\,\overline{\text{ب أ}}} \circ \text{تك}_{\text{أ}،3})(\text{س})$$

في نظريه (٦) ، برهنا أن

$$\text{ت}_{\overline{\text{ب أ}}} = \text{تك}_{\text{ب}،2} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{1}{2}}$$

ونستطيع أيضاً برهان أن

$$\text{ت}_{2\,\overline{\text{ب أ}}} = \text{تك}_{\text{ب}،3} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{1}{3}} \qquad (**)$$

بالتالي فان :

$$\text{ص} = (\text{تك}_{\text{ب}،\frac{1}{3}} \circ (\text{تك}_{\text{ب}،3} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\frac{1}{3}}) \circ \text{تك}_{\text{أ}،3})(\text{س})$$

$$= ((\text{تك}_{\text{ب}،\frac{1}{3}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،3}) \circ (\text{تك}_{\text{أ}،\frac{1}{3}} \circ \text{تك}_{\text{أ}،3}))(\text{س})$$

$$= (I \circ I)(\text{س}) = I(\text{س}) = \text{س}$$

بالمثل ، اذا كانت هـ تنصف $\overline{\text{أب}}$ ، وبفرض أن ع $\in$ $\overline{\text{جـ هـ}}$ بحيث أن $\overline{\text{حـ ع}} = 2\ \overline{\text{ع هـ}}$ فانه يمكننا اثبات أن ع = س .

٦-٣ : خواص التشابه

مما سبق نستطيع أن نجمل خواص التشابه كالآتى :

١- التشابه تحويله هندسيه (مستويه)

٢- التشابه يحفظ مقياس الزوايا .

٣-التشابه يرسل الخطوط فوق الخطوط ويحافظ على التوازى والتعامد .

٤-التشابه يحفظ البينيه .

أما أذا أردنا أن نتكلم عن خواص التكبير ، فاننا نعلم أن كل تكبير هوتشابه (نظريه (٣)). ولذلك فالخواص السابقه للتشابه تتحقق بالنسبه للتكبير . كما يجب علينا ملاحظه أن : التساويات القياسيه هى مجموعه جزئيه من التشابهات .

٦-٤: أمثله متنوعه

١-أثبت أن مصفوفه التكبير $\begin{pmatrix} \alpha & \cdot \\ \cdot & \alpha \end{pmatrix}$ هى مصفوفه تشابه .

الحل :

نفرض أن مصفوفه التحويل $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$ التى تحفظ إتجاه جميع الخطوط :

$$\{(\text{س}،\text{ص}) \; : \; \text{ص} = \text{م س}\}$$

أى

$$(\text{س}، \text{م س}) \quad \longrightarrow \quad (\text{س}'، \text{م س}')$$

لجميع قيم م حيث م هو الميل المشترك .

اذن
$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{م س} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{م س}' \end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix} \text{أ س} + \text{ب م س} \\ \text{ج س} + \text{د م س} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{م س}' \end{pmatrix}$$

وبالتالى :

$$\text{أ س} + \text{ب م س} = \text{س}'$$

$$\text{ج س} + \text{ء م س} = \text{م س}'$$

بالقسمه نجد أن :

$$\frac{\text{أ} + \text{ب م}}{\text{ج} + \text{د م}} = \frac{١}{\text{م}}$$

أى

$$\text{ب م}^{٢} + \text{م} (\text{أ} - \text{د}) - \text{ج} = ٠$$

وحيث أن هذه المعادله تتحقق لجميع قيم ج ، فيجب أن تكون :

$\text{ب} = ٠$ ، $\text{ج} = ٠$ ، $\text{أ} = \text{د} = \alpha$ مثلاً .

لذلك فالمصفوفه $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$ تأخذ الصوره :

$$I\alpha = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} \alpha & ٠ \\ ٠ & \alpha \end{pmatrix}$$

وقيمه محدد التحويل هو $\alpha^{٢}$ ، مما يثبت أن جميع الأشكال تزداد مساحتها بتحويل التكبير $\alpha^{٢}$ من المرات . وتزداد كذلك جميع الأطوال بمقدار α من المرات وتظل جميع الزوايا كما هى بينما الاتجاه يظل ثابتاً .

وهذا يثبت أن $\begin{pmatrix} \alpha & ٠ \\ ٠ & \alpha \end{pmatrix}$ تحويل الشكل الى شكل تشابه α لأن نسبه الأضلاع المتناظره في الشكل وصورته واحده والزوايا متساويه أى أن المصفوفه تمثل تشابها .

٢- اذا كانت و (٠،٠) ، ق(٢،٥) نقط معطاه ، فأوجد

$$ق' = تك_{و،٣} \ (٢،٥)$$

الحل :

$$تك_{و،\alpha} \ (س،ص) = (\alpha \ س، \alpha ص)$$

اذن

$$تك_{و،٣} \ (٢ ، ٥) = (٦،١٥)$$

٣-لأى نقطه ق(س،ص) ، عين إحداثيات $تك_{و^*،٣}$ (ق) اذا كانت $و^*$ = (-٢،٣)

الحل :

باستخدام نظريه (٥) :

$$تك_{و^*،٣} \ (ق) = (\alpha \ س + أ (١- \alpha) ، \alpha ص +ب(١- \alpha))$$

هنا : أ = -٢ ، ب = ٣ ، α = ٣ .

اذن

$$تك_{و^*،٣} \ (س،ص) = (٣س - ٢(١-٣) ، ٣ص+ ٣(١-٣))$$

$$= (٣س +٤ ، ٣ص - ٦)$$

٤- أوجد إحداثيات **ن** اذا كان $تك_{ن،٣}$ معرف بالقاعده :

$تك_{ن،٣}$ (**ق**) = (٣س+٢ ، ٣ص+٤)   ∀ **ق** (س،ص)

ثم أوجد $تك_{ن،٣}$ (٢،١) .

الحل:

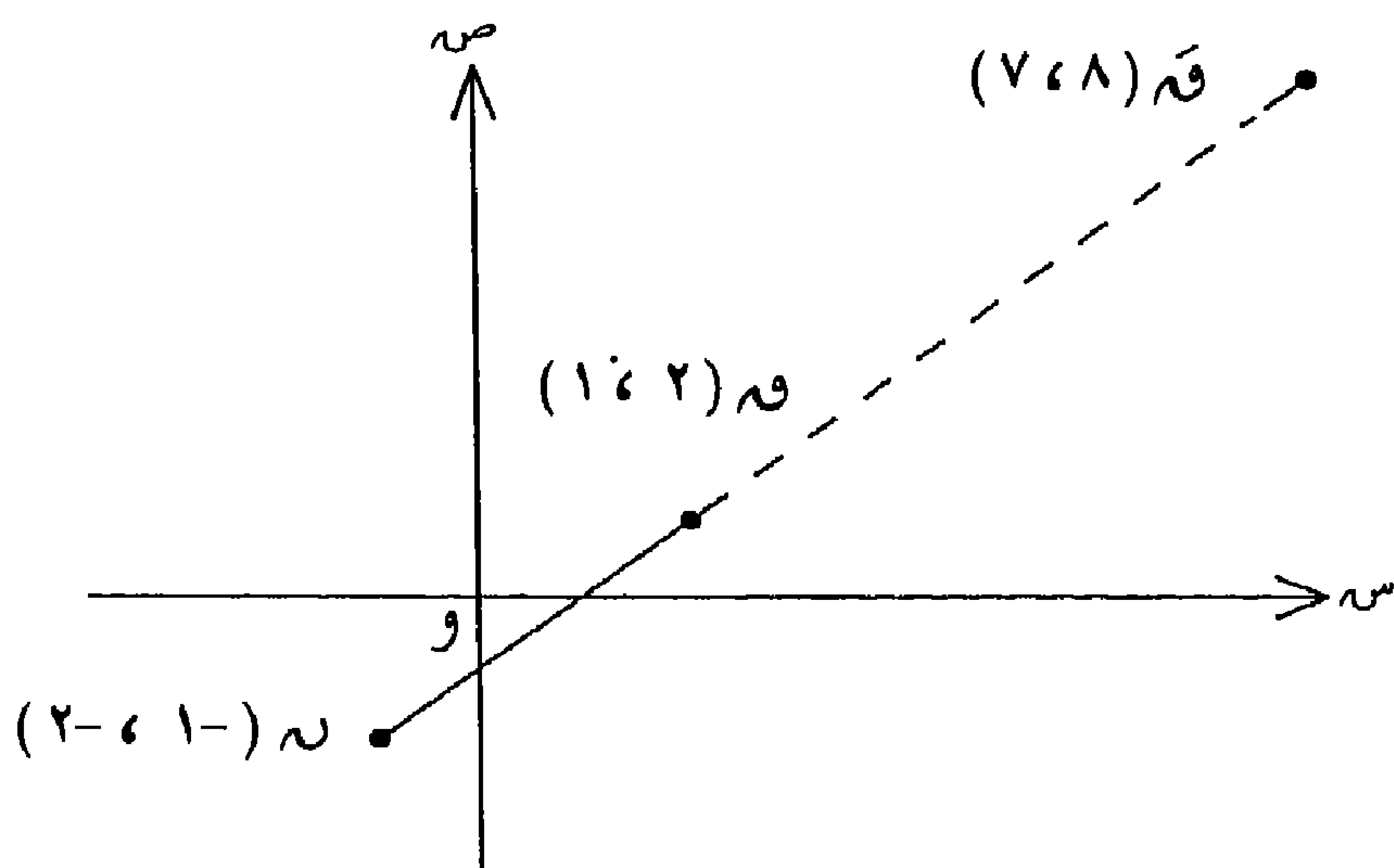
باستخدام ملاحظه (٢) ، نجد أن :

ن = ($\frac{٢}{١-٣}$ ، $\frac{٤}{١-٣}$) = (-١،-٢)

وهى تمثل مركز التكبير $تك_{ن،٣}$

اذن

$تك_{ن،٣}$ (٢،١) = (٨ ، ٧



شكل (٦-١٤)

الشكل (٦-١٤) يوضح صحه النتيجه .

تمارين عامة

١-لتكن أ ، ق ، ك نقط معطاه كما بالشكل . عين :

(أ) $\text{تك}_{أ،٢}$ (ق) (ب) $\text{تك}_{أ،\frac{1}{3}}$ (ك)

• ق

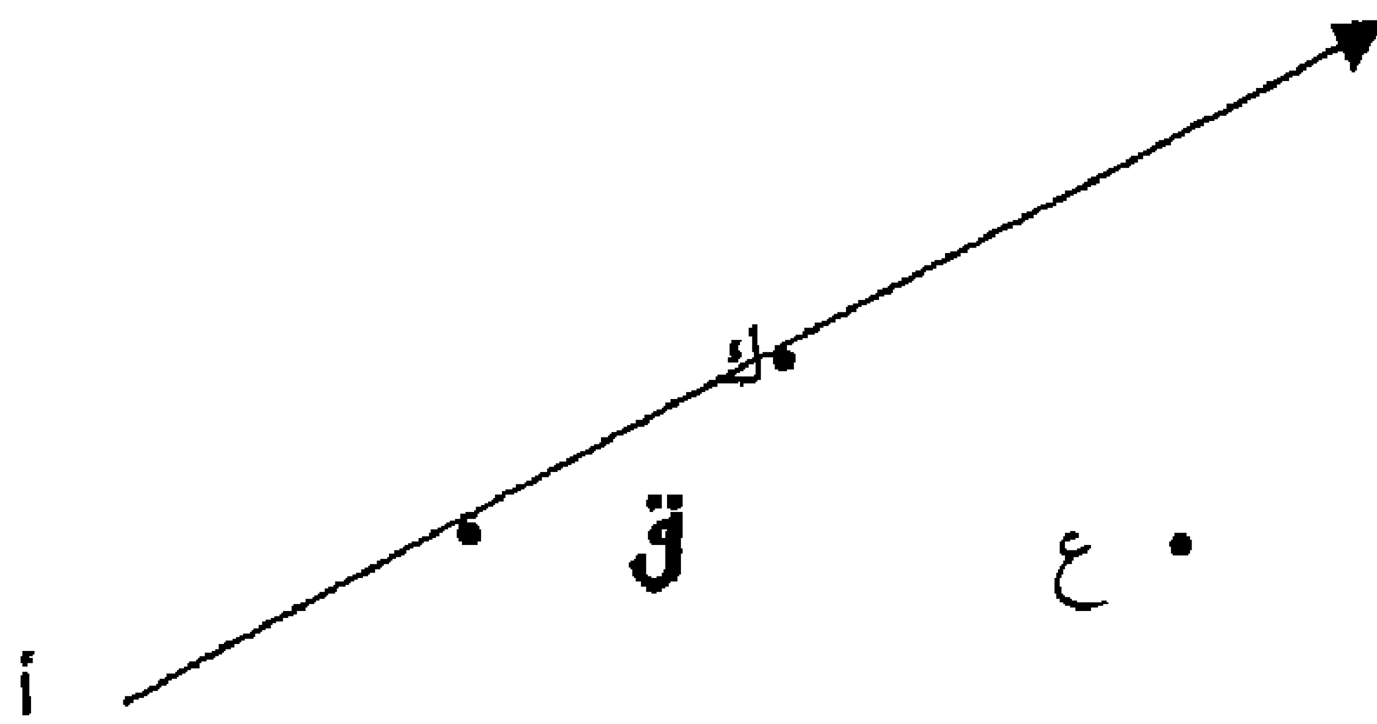
• ك

أ •

٢-لتكن أ ، ق ، ك ، ع نقط معطاه كما بالشكل . أوجد $\text{تك}_{أ،\alpha}$ (ع) اذا كان :

(أ) $\text{تك}_{أ،\alpha}$ (ك) = ق

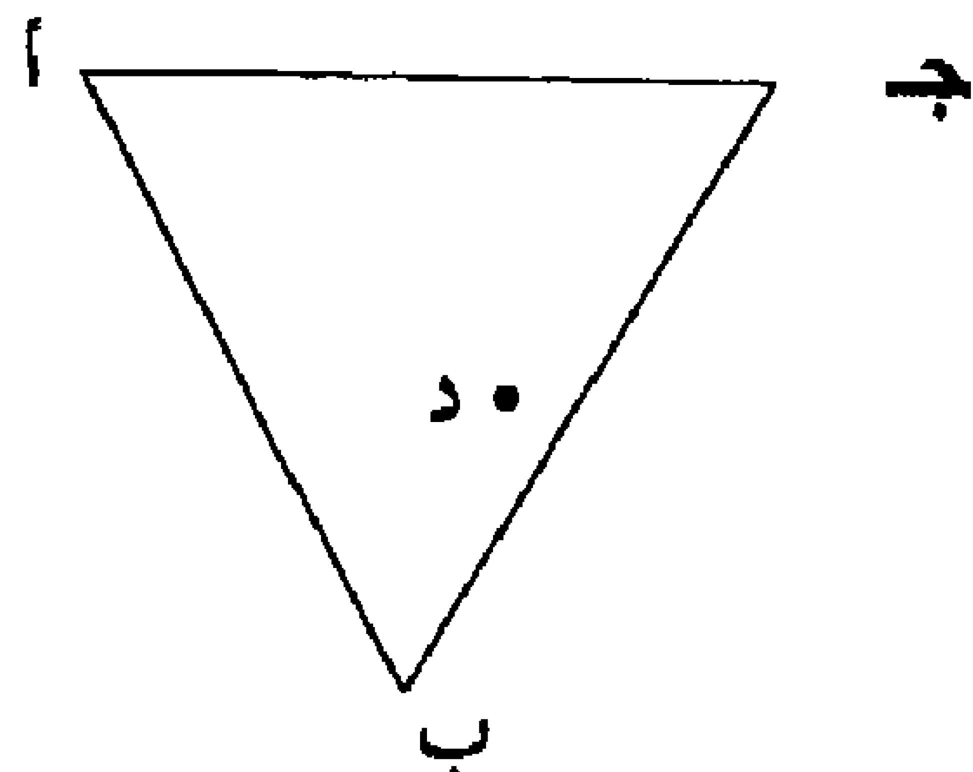
(ب) $\text{تك}_{أ،\alpha}$ (ق) = ك



٣- لتكن د ، هـ نقط معطاه كما بالشكل . وليكن Δ أ ب جـ مثلث كما يالشكل . عين:

(أ) $\text{تك}_{د،\frac{4}{3}}$ (Δ أ ب جـ)

(ب) $\text{تك}_{ن،\frac{2}{3}}$ (Δ أ ب جـ)



هـ •

٤-لتكن أ ، ق ،ك نقط غير واقعه على استقامه واحده . عين

(أ) س بحيث أن $تك_{أ، \frac{٢}{٣}}$ (س) = ق • ق

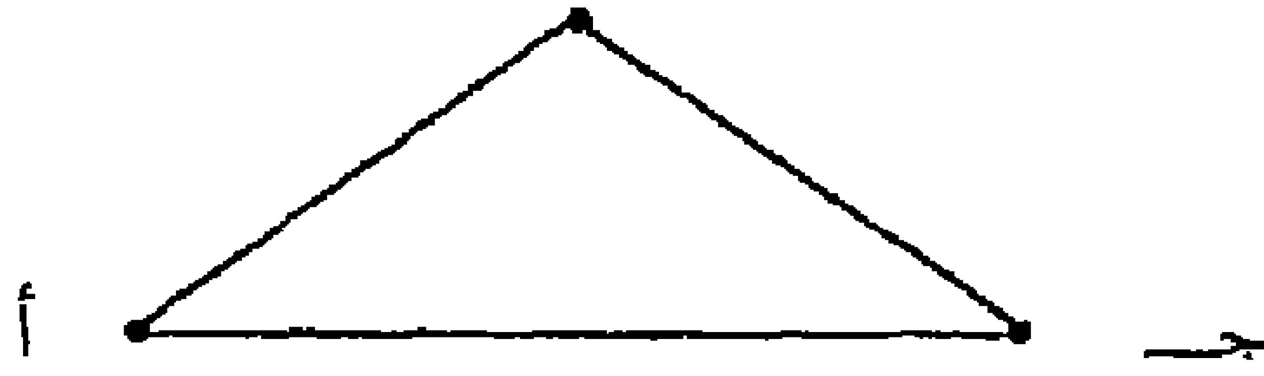
(ب) ق َ = $تك_{أ، ٢}$ (ق)

(ج) كَ = $تك_{أ، ٣}$ (ك) • ك

٥-ليكن Δ أ ب جـ مثلث معطى . عين موضع النقطه ن اذا كان $تك_{ن، \alpha}$ (أ)=جـ،

مساحه Δ أ ب جـ = ٤ (مساحه (Δ أ بَ جَـ) حيث

Δ أَ بَ جَـ = $تك_{ن، \alpha}$ (Δ أ ب جـ)



٦-ليكن Δ أ ب جـ مثلث ما ، ف نقطه معطاه .

(أ) عين Δ أَ بَ جَـ = $تك_{ف، \alpha}$ (Δ أ ب جـ) بحيث أن جـ د أَبَ .

(ب) عين Δ أً بً جً = $تك_{ف، \alpha}$ (Δ أ ب جـ) بحيث أن

مساحه(Δ أً بً جً) = ٣(مساحه (Δ أ ب جـ))



٧–بين صحه أو خطأ التقارير التاليه:

(أ) اذا كان $\text{تك}_{أ،\alpha}$ (Δ س ص ع) = Δ سَ صَ عَ ، فان

Δ س ص ع ~ Δ سَ صَ عَ .

(ب) اذا كان $\text{تك}_{أ،\alpha}$ (ق) = $\text{تك}_{ب،\beta}$ (ق) لنقطه ما ق ، فان أ = ب ، $\alpha = \beta$.

(ج) اذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، فانه يوجد تكبير يرسل $\overline{أب}$ فوق $\overline{جـ د}$.

(ء)اذا كانت ق نقطه تلاقي المستقيمات المتوسطه فى Δ أ ب جـ ،

ق* = $\text{تك}_{أ،\frac{3}{2}}$ (ق) ، فان $\text{تك}_{ج،2}$ (ق*) = ب

٨–اذا كانت و (٠،٠) ، ق (٢،٥) فأوجد احداثيات قَ = $\text{تك}_{و،4}$ (١،٣) .

٩–أوجد احداثيات ق اذا كان $\text{تك}_{ق،\alpha}$ يرسل ن (١،٢) فوق ف (٢،٦)، جـ (٣،٠)

فوق د (٧،١) .

١٠–لأى نقطه ق(س،ص) ، عين احداثيات $\text{تك}_{و،2}$ (ق) ، $\text{تك}_{و،\frac{1}{2}}$ (ق) اذا كانت

و= (–١،٢) ، ثم اوجد ($\text{تك}_{و،2}$ ∘ $\text{تك}_{و،\frac{1}{2}}$)(ق) .

١١–اذا كان

Δ أ*ب*جـ*=($\text{تك}_{ن،\frac{3}{4}}$ ∘ $\text{تك}_{ف،2}$ ∘ $ر_{ن،30}$)(Δ أب جـ) ،

مساحه (Δ أ ب جـ) = ٦ ، فعين مساحه Δ أ* ب* جـ*.

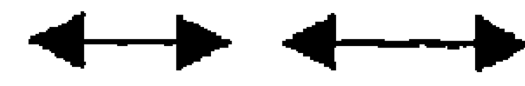
١٢- بين صحه أوخطأ التقارير التاليه :

(أ) مجموعة كل التكبيرات (ذات مركز تكبير مشترك) مع عمليه التحصيل o تؤلف زمره.

(ب) $(\text{تك}_{\text{أ}،\alpha} \circ \text{تك}_{\text{ب}،\beta})^{-1} = \text{تك}_{\text{ب}،\beta} \circ \text{تك}_{\text{أ}،\alpha}$ ، $\forall$ $\text{تك}_{\text{أ}،\alpha}$ ، $\text{تك}_{\text{ب}،\beta}$

(ج) اذاكان $\text{تك}_{\text{أ}،\alpha}(\text{ق}) = \text{تك}_{\text{ب}،\beta}(\text{ق})$ فان أ = ب .

(ء) اذا كان $\text{تك}_{\text{أ}،\frac{2}{3}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،\beta}$ ليس له نقطه ثابته ،فانه لأى نقطه ق يكون



ق ق* // أ ب حيث ق* = $(\text{تك}_{\text{أ}،\frac{2}{3}} \circ \text{تك}_{\text{ب}،\beta})(\text{ق})$

١٣- برهن النظريات التاليه :

أ - اذاكان $ر_1$ ، $ر_2$ رواسم تكبير فان $ر_1 \circ ر_2$ راسم تكبير .

ب - اذا كان $\text{تك}_{\text{ح}،\alpha}$ ، $\text{تك}_{\text{ح}،\beta}$ تكبيرين لهما مركز تكبير مشترك ، فان

$\text{تك}_{\text{ح}،\alpha} \circ \text{تك}_{\text{ح}،\beta} = \text{تك}_{\text{ح}،\beta} \circ \text{تك}_{\text{ح}،\alpha}$.

ج - لأى إنتقال $ت_{\text{أب}}$ ولأى تكبير $\text{تك}_{\text{ح}،\alpha}$ ، توجد نقطه ف بحيث أن

$\text{تك}_{\text{ح}،\alpha} \circ ت_{\text{أب}} = \text{تك}_{\text{ح}،\alpha}$

١٤ - اذا كانت و =(١،٣) ، ق(س،ص) أى نقطه :

أ - عين $\text{تك}_{\text{و}،\frac{3}{4}}(\text{ق})$

ب - اذا كان ل ={(س،ص) :٢س +ص =٨} ، فاكتب معادله $\text{تك}_{\text{و}،\frac{3}{4}}(\underline{\text{ل}})$.

١٥-برهن أن :

أ ≠ ب ⟸ $تك_{أ،٣} \circ تك_{ب،\frac{١}{٣}} = ت_{٢أب}$.

١٦-اذا كانت أ(٠،٠) ، ب (٧ ، ٢) ، جـ (١، ٤) رؤوس مثلث Δ أب جـ .

فأوجد نقطه تلاقى المستقيمات المتوسطه فى Δ أب جـ .

١٧-اذا كانت ن نقطه تلاقى المستقيمات المتوسطه فى Δ أب جـ حيث

أ (٠ ، ٢) ، ب (٦ ، ٠) ، جـ (٨ ، ١٠) ، فعين رؤوس

($م_ن \circ تك_{ن،\frac{١}{٢}}$) Δ أب جـ .

هندسة التحويلات

لطلبة الجامعات والمعاهد العليا

هذا الكتاب

يهدف فى المقام الأول إلى تعريف الطالب لغة «هندسة التحويلات» ودراستها كتركيب رياضى أو كنظام من أنظمة المسلمات. ونهدف فى المقام الثانى أن يكون هذا الكتاب نقطة إنطلاق لكتب أكثر تعمقًا وأكثر تخصصًا لتغطية العديد من أفرع الرياضيات المستحدثة والتى يجب أن توجد فى المكتبة العربية حتى نواكب ركب الحضارة والعلوم الحديثة، ونثرى تلك المكتبة بالمراجع العلمية. ونهدف أخيراً إلى أن يكون هذا الكتاب مرجعًا للسنوات الجامعية الأولى والمعاهد العليا.

وقد حاولنا بقدر الإمكان أن تكون أبواب الكتاب متناسقة حتى تكون
القراءة مريحة ومثمرة. وحرصنا أيضًا على أن يكون الكتاب مجالا لتوجي
نحو التفكير والمعرفة، والمعرفة باب العلم، والعلم وسيلة التفوق والس



IHCI

INTERNATIONAL HOUSE FOR CULTURAL INVESTMENTS

CAIRO - EGYPT

ISBN: 977 - 282 - 077 - 3